9/02/2023

Corrección: Sea G una red plana de orden n con fuentes $f_1, \dots, f_n$ y pozos $p_1, \dots, p_n$, y sea G' una red plana de orden $k<n$ con fuentes $f_1', \dots, f_k'$ y pozos $p_1', \dots, p_k'$. Construimos una red plana G_i pegando $f_1', \dots, f_k'$ (en orden) a $p_{i+1}, \dots, p_{i+k}$ para $1 \leq i \leq n-k$.

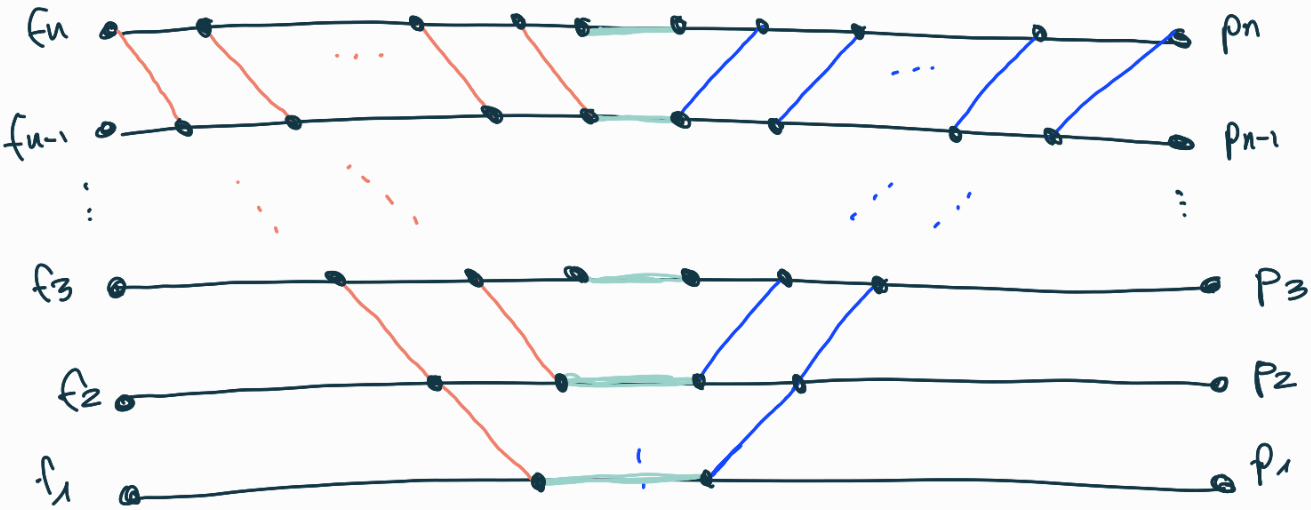
$\Rightarrow$ La matriz de caminos de G_i es el producto

$$W \cdot \begin{pmatrix} \underbrace{1 \ \ddots \ 1}_{i} & & 0 \\ & \boxed{W'} & \\ 0 & & 1 \ \ddots \ 1 \end{pmatrix}$$

donde W es la matriz de caminos de G, W' es la matriz de caminos de G'.

En la primera clase vimos una red plana que realiza todas las matrices TP como matriz de caminos para cierta elección de pesos. Se generaliza para matrices $n \times n$:

Definición: La red plana Γ de orden n es



Ejercicio: Verifica que Γ es totalmente conexa (i.e. $\forall\, I, J \in \binom{[n]}{k}$, $k \leq n$ $\exists$ al menos una familia de caminos libre de intersecciones de $\{f_i : i \in I\}$ a $\{p_j : j \in J\}$.

Corolario: Sea ω una selección de pesos reales positivos para las aristas de Γ. Entonces, la matriz de caminos asociada $W_{\Gamma,\omega}$ es totalmente positiva.

Definición: Las aristas coloreadas de Γ se llaman esenciales.

Ejercicio: ¿Cuántas aristas esenciales tiene Γ?

Definición: Una selección de pesos $\omega = (\omega(e))_{e\in\Gamma}$ es esencial si $\omega(e)\neq 0$ para cada arista esencial $e\in\Gamma$ y $\omega(e)=1$ para cada arista no esencial.

Nuestro objetivo es mostrar el siguiente teorema:

Teorema: La aplicación que asocia a cada selección de pesos ω para Γ la matriz de caminos ponderada $W_{\Gamma,\omega}$ induce una biyección

$$\left\{\omega \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{selección de pesos}\\ \text{reales positivos}\\ \text{esenciales}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{ W \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{matriz } n\times n\\ \text{totalmente}\\ \text{positiva}\end{array}\right\}$$

Su prueba requiere algo de preparación.

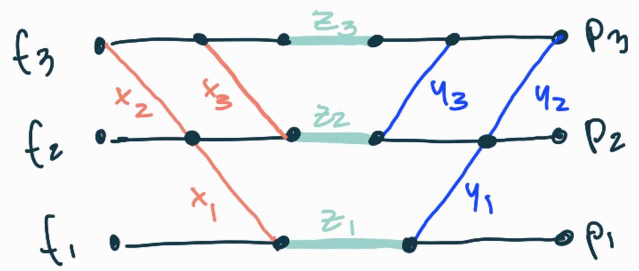
Definición: Un menor $\Delta_{I,J}(A)$ de una matriz $A\in M_n(\mathbb{R})$ se llama inicial si $I=[i+1,i+k]$, $J=[j+1,j+k]$ con $k\le n$, $0\le i,j\le n-k$ y además $i=0$ o $j=0$.

Ejemplo: $\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$ ✓ $\quad \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$ ↯

Ejercicio: ¿Cuáles son los menores iniciales de una matriz 3×3? ¿Cuántos menores iniciales tiene una matriz $n\times n$?

Lema ① Sea ω una selección de pesos esencial para Γ. Entonces, existe una transformación monomial entre los pesos $\omega(e)$ y los menores iniciales $\Delta_{I,J}(W_{\Gamma,\omega})$. Es decir, cada $\omega(e)$ se puede expresar como monomio de Laurent en menores iniciales y vice versa.

Ejemplo: Sea $n=3$

$\Gamma =$ 

$$W = \begin{bmatrix} z_1 & z_1y_1 & z_1y_1y_2 \\ x_1z_1 & z_2+x_1z_1y_1 & x_1z_1y_1y_2+z_2y_3 \\ x_2x_1z_1 & x_2z_2+x_3z_2 & x_1x_2z_1y_1y_2+x_2(z_2y_3+z_2y_2)+x_3(z_2y_2+z_2y_3)+z_3 \end{bmatrix}$$

Para simplificar la notación escribimos $\Delta_{I,J}$ para $\Delta_{I,J}(W)$:

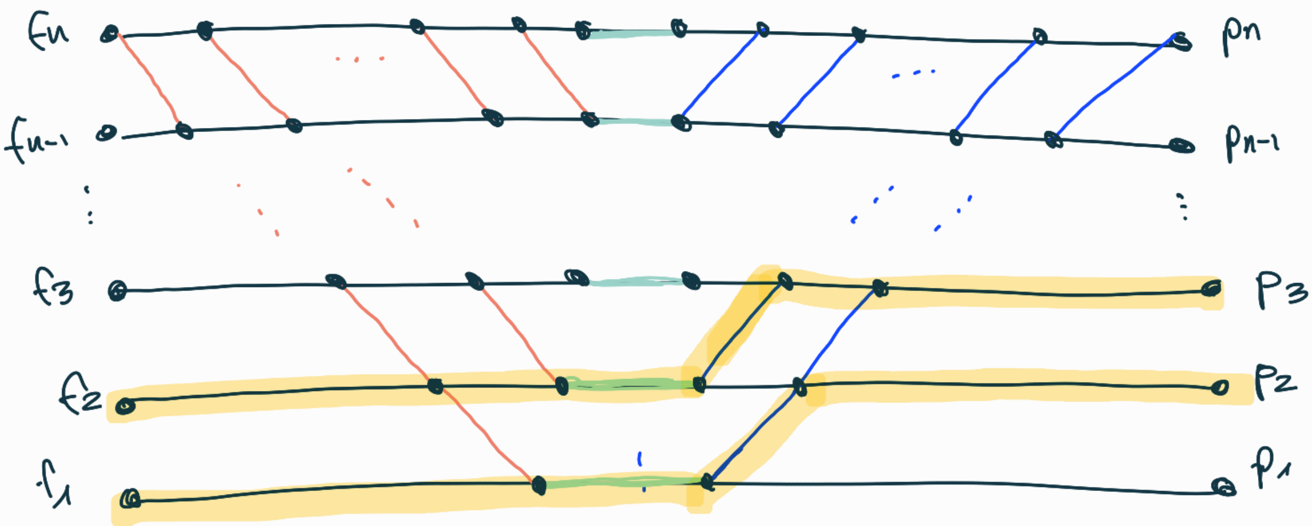
tenemos $\Delta_{1,1}=z_1$ y $\Delta_{1,2}=z_1y_1 \Rightarrow y_1=\dfrac{\Delta_{1,2}}{\Delta_{1,1}}$ y $x_1=\dfrac{\Delta_{2,1}}{\Delta_{1,1}}$

$\Delta_{2,1}=x_1z_1$

$$\Delta_{12,12} = z_1z_2+x_1z_1^2y_1 - z_1^2y_1x_1 = z_1z_2 \Rightarrow z_2=\frac{\Delta_{12,12}}{\Delta_{1,1}}$$

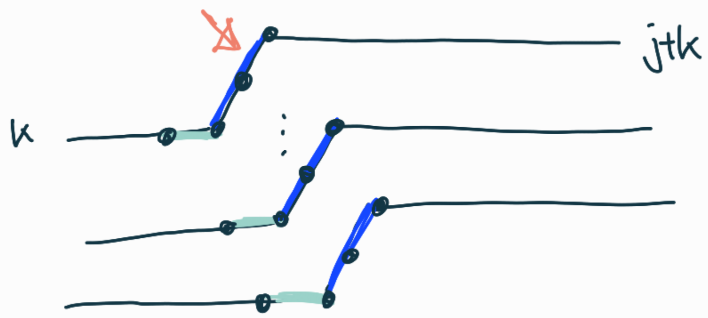
Tarea: Complementa el ejemplo y calcula las expresiones de los pesos en términos de menores iniciales y vice versa.

Prueba del Lema: Primero nota que para cada conjunto $J=[j+1,j+k]$ con $0\leq j\leq n-k$ y $1\leq k\leq n$ existe una única familia de caminos libre de intersecciones de $[1,k]$ a J en Γ: por ejemplo $J=\{2,3\}$



Por consecuencia del Lema de Lindström entonces todos los menores iniciales de forma $\Delta_{[1,k],[j+1,j+k]}$ son monomios en los pesos esenciales.

Nota que para cada k y j la familia de caminos asociada contiene una única arista esencial que está ubicada más arriba que todas las demás aristas esenciales:



Si $\Delta = \Delta_{[1,k],[j+1,j+k]}$ denotamos por $e(\Delta)$ esta arista.

Nota que $e(\Delta)$ determina Δ de manera única también: su vertice superior indica $j+k$ y siguiendo el diagonal azul hasta la arista verde indica k.

Por lo tanto, la aplicación $\Delta \mapsto e(\Delta)$ es una biyección entre menores $\Delta_{[1,k],[j+1,j+k]}$ y aristas esenciales azules y verdes.

Para incluir las aristas esenciales rojas es suficiente considerar menores iniciales $\Delta_{[i+1,i+k],[1,k]}$.

Observa que el peso de la arista verde en la linea entre f_k y p_k es

$$\frac{\Delta_{[k],[k]}}{\Delta_{[k-1],[k-1]}}$$

De manera similar, el peso de la arista azul adyacente a la arista verde en nivel k es

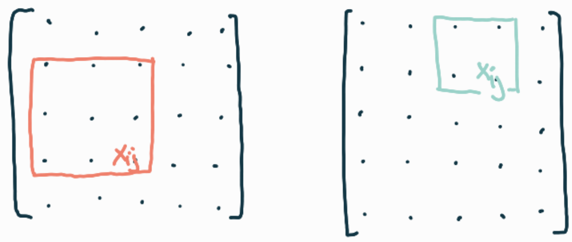
$$\frac{\Delta_{[k],[2,k+1]}\,\Delta_{[k-1],[k-1]}}{\Delta_{[k-1],[2,k]}\,\Delta_{[k],[k]}}$$

Siguiendo la misma idea podemos ver que el peso de una arista esenciale es el producto de Δ con $e(\Delta)=e$ con menores iniciales Δ' con $e(\Delta')$ por abajo de e. $\square$

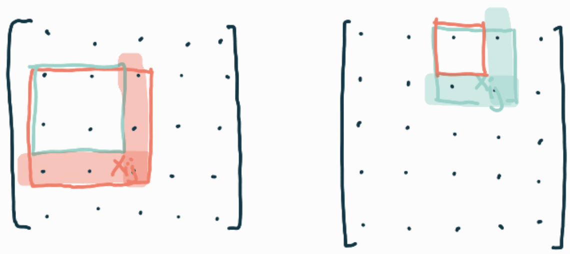
Una consecuencia del Lema (1) es que los menores iniciales de una matriz de caminos ponderada de Γ determinan de manera única todos los pesos de aristas esenciales. Para mostrar que cada matriz TP es de Γ con ciertos pesos es suficiente mostrar que los menores iniciales de una matriz TP determinan la matriz de manera única. Mostramos un resultado aún más fuerte:

Lema (2) Cada matriz cuadrada está determinada de manera única por sus menores iniciales siempre y cuando no son ceros.

Prueba: Mostramos que cada entrada x_{ij} de la matriz está determinada por menores iniciales. Si $i=1$ o $j=1$ x_{ij} es un menor inicial. Por lo tanto supongamos que $\min\{i,j\}>1$. Sea Δ el menor cuya última columna es j y última fila es i:



y sea Δ' el menor obtenido de Δ eliminando la fila i y la columna j:



La expansión de Laplace $\Rightarrow$ $\Delta = \Delta' x_{ij} + P$ donde P es un polinomio en x_{ab} con $(a,b) \neq (i,j)$ y $a \leq i$, $b \leq j$. Procediendo con inducción en $i+j$ podemos suponer que cada entrada x_{ab} está determinada de manera única por menores iniciales.

Por lo tanto también $x_{ij} = \frac{\Delta - P}{\Delta'}$ está determinada de manera única siempre y cuando $\Delta' \neq 0$. $\square$

Procedemos con la prueba del Teorema principal:

Cada matriz cuadrada TP es la matriz de caminos de Γ para alguna selección de pesos reales positivos esencial.

Prueba: Por el Lema de Lindström cada matriz de caminos ponderada (con pesos esenciales en $\mathbb{R}_{>0}$) es TP y la selección de pesos esencial determina la matriz de manera única.

A reves: sea W una matriz TP

Lema (2) $\Rightarrow$ los menores iniciales de W determinan W de manera única

Lema (1) $\Rightarrow$ Los menores iniciales de W determinan una selección de pesos esencial (en $\mathbb{R}_{>0}$) de manera única. $\square$

Las observaciones sobre los menores iniciales tienen otra consecuencia poderosa con respecto a los certificados de positividad:

Definición. Un conjunto de menores $\mathcal{C}$ es un certificado de positividad si

$$\Delta(M) > 0 \quad \forall M \in \mathcal{C} \Rightarrow M \text{ es TP.}$$

Teorema: Una matriz cuadrada es TP si y solo si todos sus menores iniciales son positivos. Es decir, los menores iniciales son un certificado de positividad.

Prueba: es una consecuencia directa de los resultados anteriores. $\square$

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces sus menores son $a, b, c, d, \Delta = ad - bc$. Los menores iniciales son a, b, c, Δ y tenemos $d = \frac{\Delta + bc}{a}$.

Observación: Una matriz $n \times n$ tiene n^2 menores iniciales. También $n^2 = \dim_{\mathbb{R}}(M_n(\mathbb{R}))$ y por lo tanto se puede mostrar que no se puede disminuir la cardinalidad del certificado. Certificados de positividad de cardinalidad minimal se llaman eficiente.