Teorema (Tits) Sean $\mathbf{i}=(i_1,\dots,i_\ell)$ y $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_\ell)$ dos palabras reducidas para $w\in S_n$. Entonces, $\mathbf{i}$ se obtiene de $\mathbf{j}$ atraves de los siguientes operaciones:

2-movimiento $\quad \cdots\, i\, j \cdots \longleftrightarrow \cdots\, j\, i \cdots \qquad |i-j|>1$

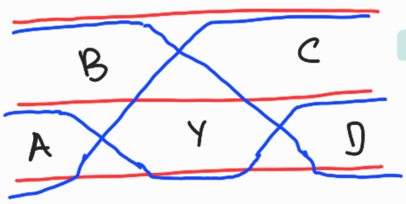
3-movimiento $\quad \cdots\, i\;\, i{+}1\;\, i \cdots \longleftrightarrow \cdots\, i{+}1\;\, i\;\, i{+}1 \cdots$

Definición: Dos diagramas de cables doble son isotopicos si tienen el mismo conjunto de menores de cámaras.

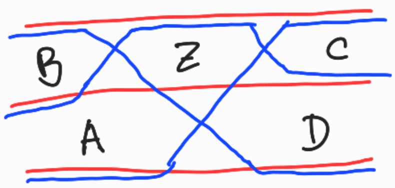
Ejercicio: Sean D y D' dos diagramas de cables doble y sean $\mathbf{i}$ y $\mathbf{i}'$ las palabras asociadas. Verifica que si y $\mathbf{i}$ se puede obtener de $\mathbf{i}$ de una secuencia de 2-movimientos, entonces D y D' son isotopicos.

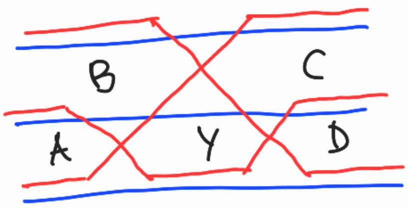
En cambio, los 3-movimientos en palabras se traducen a movimientos entre diagramas no isotopicos.

Definición: Los siguientes so movimientos locales en diagramas de cables doble

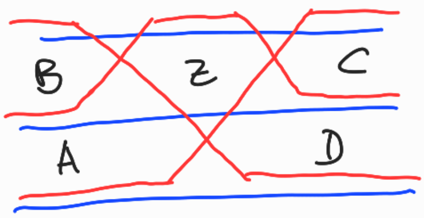


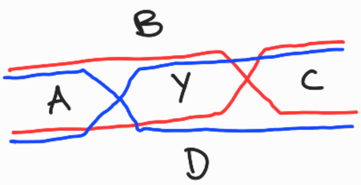
3-movimiento
$\longleftrightarrow$
azul



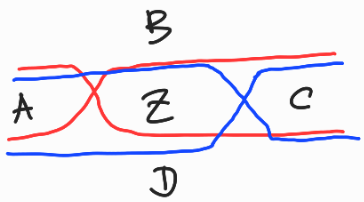


3-movimiento
$\longleftrightarrow$
rojo





2-movimiento
$\longleftrightarrow$
rojo/azul



Comentario: El 2-movimiento rojo/azul se traduce a un intercambio de i y $\bar{i}$ en dos palabras asociadas. Podemos pensar en las palabras de los diagramas de cables doble como palabras reducidas en $S_n \times S_n$ lo cual es un grupo de Coxeter cuyo diagrama de Coxeter consiste de dos copias disconexas de A_{n-1}. El 2-movimiento rojo/azul entonces es un 2-movimiento de $S_n \times S_n$, mientras tanto los 3-movimientos azules y rojos son 3-movimientos de $S_n \times S_n$ que corresponden a los 3-movimientos de ambas copias de S_n. El Teorema de Tits aplica más general al caso de $S_n \times S_n$ (y variantes propias para cada grupo de Coxeter)

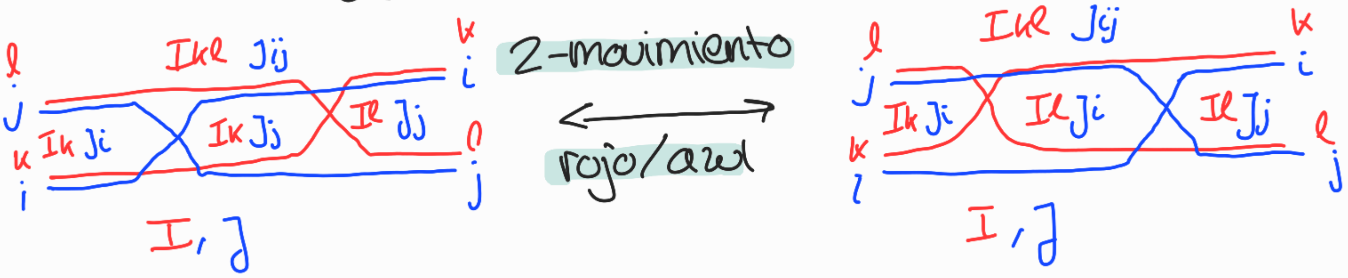
Proposición: Cada dos diagramas de cables doble son relacionados por una secuencia de movimientos locales bajo istopia. //

↳ Paso 3.

Nos falta el Paso 2 en la prueba del Teorema. Se obtiene de lo siguiente:

Lema 1: Sean Γ y Γ' dos diagramas de cables doble. Si los dos diagramas de cables doble son relacionados por un movimiento local, entonces sus menores de cámaras satisfacen $AC + BD = YZ$.
En particular, Z tiene una expresión racional libre de substracción en los menores de cámara de Γ.

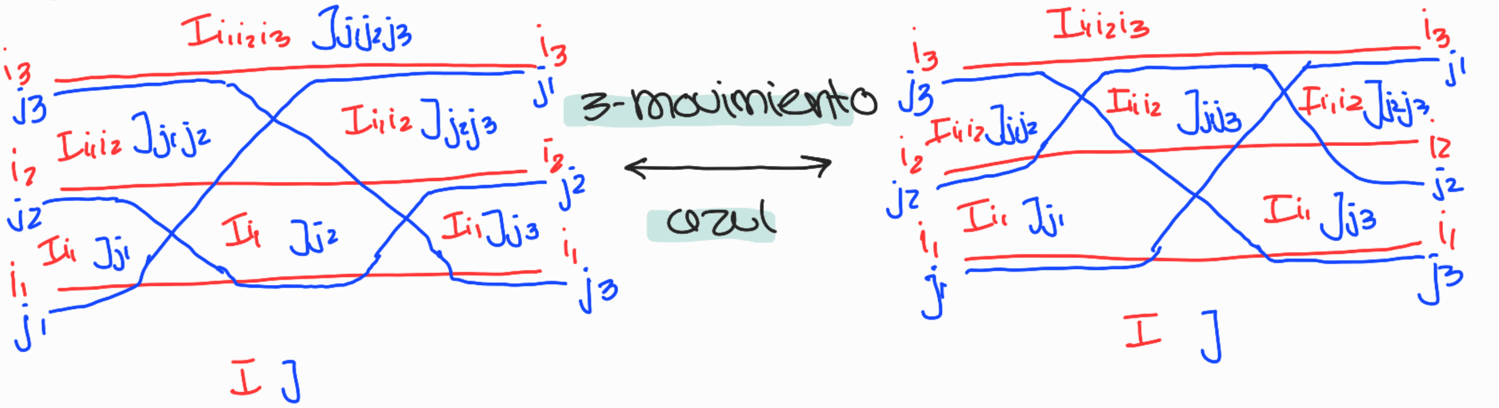
Prueba: Empezamos con el último caso analizando los menores de cámaras:



P.D. $\Delta_{I_k J_j}\Delta_{I_\ell J_i} = \Delta_{I_k J_i}\Delta_{I_\ell J_j} + \Delta_{I_{k\ell}, J_{ij}}\Delta_{I, J}$

Es una consecuencia de la fórmula de Jacobi (página 6 apuntes del 14/02/2023) con $B = (x_{ab})_{\substack{a\in I\cup\{i_1 i_2\} \\ b\in J\cup\{j_1 j_2\}}}$

Las relaciones de los otros dos movimientos son



$$\Delta_{I i_1, J j_2}\Delta_{I i_1 i_2, J j_1 j_3} = \Delta_{I i_1, J j_1}\Delta_{I i_1 i_2, J j_2 j_3} + \Delta_{I i_1 i_2, J j_1 j_2}\Delta_{I i_1, J j_3}$$

Es un caso especial de una relación de Plücker como vamos a ver más adelante. //

Prueba del Teorema: certificados de menores de cámaras.

Paso 1: Existe un diagrama de cables doble cuyos menores de cámara son los menores iniciales → certificado de positividad //

Pasos 2 y 3: Cada diagrama de cables doble es determinada de manera única por una palabra reducida de $w_0 \times w_0 \in S_n \times S_n$.
El teorema de Tits implica que cada dos de esas palabras son relacionadas por una secuencia finita de 2- y 3-movimientos.
Los 2- y 3-movimientos se traducen a los diagramas según el Lema 1. Si Γ y Γ' son dos diagramas de cables doble relacionados por 2- y 3-movimientos de Γ' tienen entonces todos los menores de cámaras libres de substracciones en expresiones racionales los menores de cámaras de Γ.
$\Rightarrow$ si Γ es un certificado de positividad, Γ' también lo es. $\square$

Fomin y Zelevinsky sugieron la siguiente conjetura más fuerte:

Conjetura ('94) Cada menor de una matriz cuadrada genérica tiene una expresión como polinomio de Laurent libre de substracciones

Es un caso especial de la conjetura de positividad del fenomeno de Laurent para las algebras de conglomerado que fue resuelta por Gross-Hacking-Keel-Kontsevich en 2018

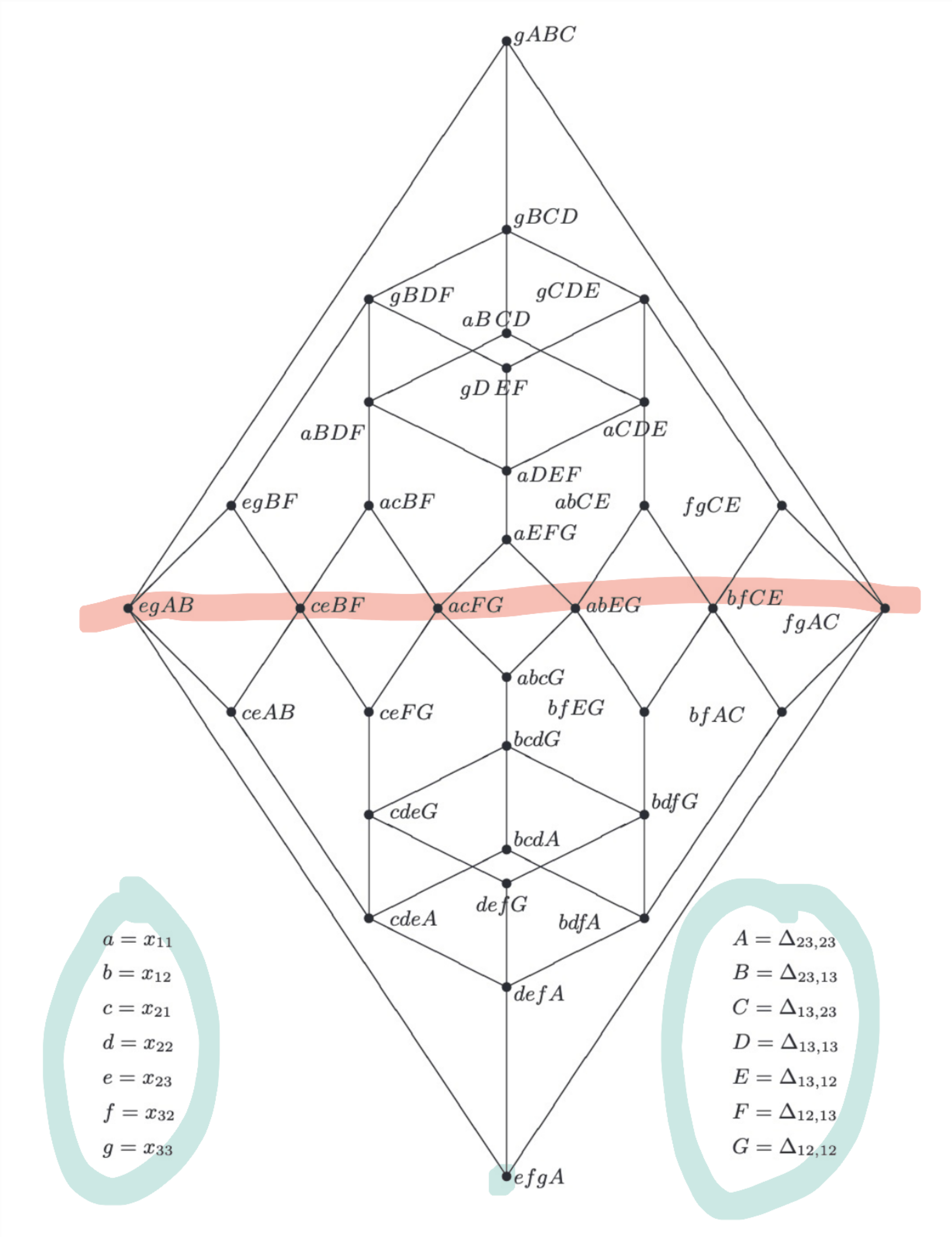


FIGURE 10. Total positivity criteria for GL_3

§ Relaciones de Plücker

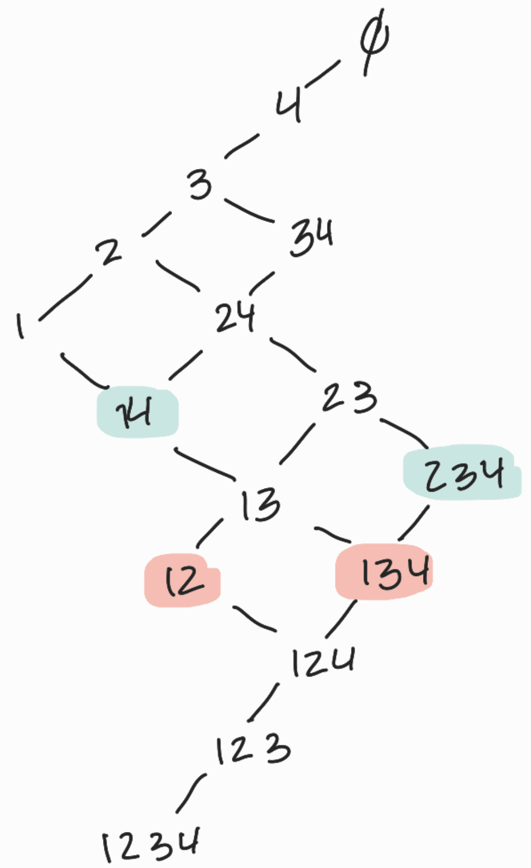
En esta sección nos vamos a enfocar en menores de forma

$$\Delta_{[d],\{i_1,\dots,i_d\}} =: P_{\{i_1,\dots,i_d\}}$$

de una matriz $n\times n$, donde $I=\{i_1,\dots,i_d\}\in\binom{[n]}{d}$ y $d\le n$.
Consideramos el poset (conjunto parcialmente ordenado) P cuyo conjunto subyacente es $\bigcup_{d=0}^{n}\binom{[n]}{d}$. El orden parcial es definido para $\sigma=\{\sigma_1<\dots<\sigma_s\}$ y $\tau=\{\tau_1<\dots<\tau_t\}$ es

$$\sigma\le\tau \iff s\ge t \text{ y } \sigma_i\le\tau_i \quad \forall\, i=1,\dots,t$$

Ejemplo: $n=3$



Dos elementos $\sigma,\tau\in P$ son incomparables si ni $\sigma\le\tau$ ni $\tau\le\sigma$ vale. En el ejemplo hay 10 pares incomparables.

Definición: Sea $k[x]$ el anillo de polinomios en n^2 variables x_{ij} $1\le i,j\le n$ (que corresponden a entradas de una matriz $n\times n$) y sea $k[P]$ el anillo de polinomios en 2^n variables p_σ, $\sigma\in P$.

Definimos un homomorfismo de anillos

$$\phi_n : k[\mathcal{P}] \longrightarrow k[X]$$
$$p_\sigma \longmapsto \Delta_{[|\sigma|],\sigma}(X)$$

donde $X = (x_{ij})_{i,j \in [n]}$ es la matriz de variables.

El ideal $I_n := \ker(\phi_n)$ se llama el ideal de Plücker, sus elementos se llaman las relaciones de Plücker, y el cociente $k[\mathcal{P}]/I_n$ es el álgebra de Plücker.

Ejercicio: Con la graduación estándar en los anillos de polinomios $k[\mathcal{P}]$ y $k[X]$, el ideal de Plücker es homogéneo.

Teorema: El ideal de Plücker tiene un conjunto de generadores de grado dos en biyección con los pares incomparables de $\mathcal{P}$.

Comentario: Más precisamente, podemos definir un orden monomial $<$ en $k[\mathcal{P}]$ que refine el orden parcial $\leq$ de $\mathcal{P}$ de manera lexicográfica. Los monomios $p_\sigma p_\tau$ con $\sigma, \tau \in \mathcal{P}$ incomparable son los generadores del ideal inicial $\mathrm{in}_<(I_n)$. Por lo tanto, el conjunto de generadores en el Teorema es una base de Gröbner.