§ Redes planas

Def. Una gráfica dirigida plana G es una gráfica dirigida en un disco (considerado mod. homotopía). G puede tener lazos y aristas múltiples.
Supongamos que G tiene n vértices frontera en la frontera del disco, que llamamos $b_1, \dots, b_n$ (en el sentido del reloj). Las demás vértices son vértices internas. Supongamos que cada vértice frontera o es fuente o es pozo. También si b_i es un vértice aislado se le asigna la etiqueta fuente o pozo.
↳ no es adyacente a ninguna arista.

Una red plana $N = (G, x)$ es una gráfica dirigida plana junto con pesos reales positivos $x_e > 0$ para cada arista $e \in G$.
Definimos el conjunto de fuentes de N:

$$I = \{ i \in [n] : b_i \text{ es fuente} \}$$

y el conjunto de pozos $\bar{I} := [n] \setminus I$.

Si N es acíclica (no tiene ningún camino dirigido cerrado) entonces asociamos para $i \in I$, $j \in \bar{I}$ la medida de la frontera

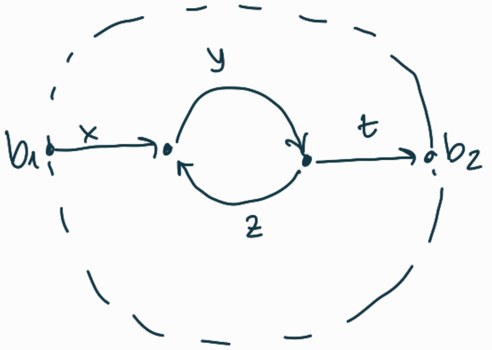
$$M_{ij} := \sum_{p : b_i \to b_j} \prod_{e \in p} x_e .$$

caminos dirigidos en G de b_i a b_j

aristas en el camino

Comentario: Si la gráfica no es acíclica se puede ajustar la definición incluyendo el número de vueltas que cuenta con signos el número de vueltas de $360°$ que toma el camino. La medida de la frontera formal incluye el coef. $(-1)^{\text{vueltas}(P)}$ y se puede mostrar que resulta ser una expresión racional libre de substracciones en las x_e también en este caso (ver. p. 11, 12 de arxiv: 0609764 Postnikov)

Ejemplo:



$$M_{12}^{\text{formal}} = xyt - xyzyt + xyzyzyt - \cdots = \frac{xyt}{(1+yz)}$$

si evaluamos $x=y=z=t=1$, obtenemos $M_{12}^{\text{form}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

El problema de la frontera inverso:

¿Qué información de una red plana se puede recuperar desde una colección de medidas de frontera M_{ij}?

¿Cómo se puede recuperar tal información?

Describe todas las colecciones posibles de medidas de frontera y todas las transformaciones de redes que las preservan.

Transformaciones de gauge:

Para cada vértice interno $v \in G$ escogemos un $t_v > 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$ para vértices frontera b_i declaramos $t_{b_i} := 1$.

Sea N' la red obtenida de $N = (G, (x_e)_{e \in G})$ con la misma gráfica G, pero pesos

$$x_e' := x_e t_u t_v^{-1} \qquad \text{donde } e = u \to v \text{ en } G.$$

Lema: Las medidas de frontera de N' coinciden con las medidas de frontera de N.

Prueba: Sea $P: b_i \to b_j$ un camino en G. Entonces su peso asociado en N es $\prod_{e \in P} x_e = \prod_{e=0}^{s} x_{e_e}$

$$b_i \xrightarrow{e_0} v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} \cdots \longrightarrow v_s \xrightarrow{e_s} b_j$$

en N' el camino tiene peso

$$\prod_{e=0}^{s} x_{e_e} t_e t_{e+1}^{-1} \qquad \text{con } t_0 = t_{b_i} = 1 \text{ y } t_{s+1} = t_{b_j} = 1$$

$$\prod_{\ell=0}^{s} x_{e_\ell} t_{e_\ell} t_{e_{\ell+1}}^{-1} = x_{e_0} t_1^{-1} t_1 x_{e_1} t_2^{-1} t_2 x_{e_2} \cdots x_{e_s} = \prod_{\ell=0}^{s} x_{e_\ell}$$ $\square$

Más adelante veremos transformaciones locales que tampoco afectan a las medidas de frontera.

Posibles colecciones de medidas de frontera:

Definición: Sea Net_{kn} el conjunto de redes planas con k fuentes en la frontera y $n-k$ pozos. Definimos la aplicación de medidas de frontera

$$Med: Net_{kn} \longrightarrow Gr_{kn}$$

Dada una red $N \in Net_{kn}$ con conjunto de fuentes I y medidas de frontera M_{ij}, el punto asociado $Med(N) \in Gr_{kn}$ se determina por sus coordenadas de Plücker $\{\Delta_J\}$ con la condición $\Delta_I \neq 0$ y

$$M_{ij} = \frac{\Delta_{I \setminus \{i\} \cup \{j\}}}{\Delta_I} \quad \forall\, i \in I, j \in \bar{I}$$

Más explícitamente, el punto $Med(N)$ es representado por su matriz de medida de frontera $A(N) = (a_{ij}) \in Mat_{kn}(\mathbb{R})$ que se define de la siguiente manera: Sea $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$

(1) La submatriz $A(N)_I$ es $\mathbb{1}_k$

(2) Las demás entradas de $A(N)$ son

$$a_{rj} = (-1)^s M_{i_r, j} \qquad r \in [k], j \in \bar{I}$$

donde $s = \max\{ |\{\ell : i_r < i_\ell < j\}|, |\{\ell : j < i_\ell < i_r\}| \}$

Lema: $\Delta_{I \setminus \{i\} \cup \{j\}}(A(N)) = M_{ij} \quad \forall\, i \in I, j \in \bar{I}$

Prueba:

$$A(N) = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccccc} & & i_1 & & i_k & & \\ \end{array}$$

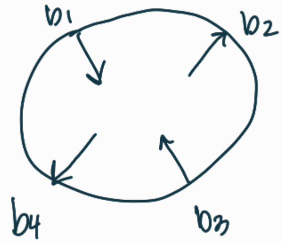
$$A(N) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & 0 & & \vdots & & \\ & & \vdots & & 0 & & \\ a_{k1} & \cdots & 0 & & 1 & & a_{kn} \end{bmatrix}$$

$$\underset{i = i_r}{\Delta_{I \setminus \{i\} \cup \{j\}}(A(N))} = \det \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & \begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{matrix} & \cdots & e_k \end{bmatrix} (-1)^s$$

posición de i_r

$$= (-1)^s a_{rj} = (-1)^{2s} M_{ij} \quad \checkmark$$

$\square$

Ejercicio: Sea $N =$  calcula $A(N)$ y las expresiones de M_{ij} en los menores max. de $A(N)$.

$$A(N) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i_1 & & i_2 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & M_{12} & 0 & -M_{14} \\ 0 & M_{32} & 1 & M_{34} \end{pmatrix} \end{array}$$

Nuestro objetivo es mostrar el siguiente resultado

Teorema (Postnikov) 4.8

La imagen de la aplicación de medida de frontera es la Grassmanniana totalmente no negativa:

$$\mathrm{Med}(Net_{kn}) = Gr_{kn}^{tnn}.$$

Recuerda las células de matroides $S_{\mathcal{M}}$ de Gr_{kn}. Definimos

$$S_{\mathcal{M}}^{tnn} := S_{\mathcal{M}} \cap Gr_{kn}^{tnn}$$

Los matroides con $S_{\mathcal{M}}^{tnn} \neq \emptyset$ se llaman positroides.

Definición: Una parametrización racional libre de sustracciones de una célula $S_{\mathcal{M}}^{tnn} \subset Gr_{kn}^{tnn}$ es un isomorfismo

$$f : \mathbb{R}^d_{>0} \longrightarrow S_{\mathcal{M}}^{tnn}$$

t.q.

(1) Para $I, J \in \mathcal{M}$ el cociente $\frac{\Delta_J}{\Delta_I}$ de coord. de Plücker de un punto $f(x_1, \dots, x_d) \in S_{\mathcal{M}}^{tnn}$ se puede escribir como una expresión racional libre de sustracciones en las coordenadas x_i de $\mathbb{R}^d_{>0}$.

(2) Para la aplicación inversa $f^{-1} : S_{\mathcal{M}}^{tnn} \longrightarrow \mathbb{R}^d_{>0}$ las x_i se pueden escribir como expresiones racionales libres de sustracciones en las coordenadas de Plücker $\{\Delta_J\}$.