

§ Redes planas

- Plan: (1) Cambio de consideradas de aristas a caras
(2) Redes planas bicoloradas (planas) su Orientación

Sea G una gráfica plana en un disco con
 $V = V(G)$ vértices y $E = E(G)$ aristas
y $F = F(G)$ caras $\rightarrow$ regiones del disco dividido
por las aristas.

Una componente conexa de G se llama aislada
si no contiene ningún vértice en la frontera.

$C := \#$ componentes aisladas de G

Tenemos la fórmula de Euler

$$|V| - |E| + |F| = 1 + C$$

Si $C=0$ todas las caras son simplemente conexas.

$C \geq 1 \quad \exists$ caras no simplemente conexas (contienen
comp. aisladas)

Componentes aisladas se pueden eliminar sin
afectar la medida de frontera

Lema 11.1 Sea G una graf. plana sin comp. aisladas.

Entonces

$$\mathbb{R}_{>0}^E / \{\text{uniform. gauge}\} \stackrel{\star}{\cong} \mathbb{R}_{>0}^{|E|-|V|} = \mathbb{R}_{>0}^{|F|-1}$$

espacio de redes planas
con gráfica G

fórmula de
Euler

Prueba: P.D. $\star$

Nota que $\star$ es equivalente a mostrar que todas

Las transformaciones de gauge son no triviales
Si tenemos una transformación de gauge

$$x'_e = x_e t_u t_v^{-1} \quad \text{con } x'_e = x_e \quad \forall e \in E$$

$\Rightarrow t_u = 1 \quad \forall$ vértice ady. a un vértice frontera b :

$\Rightarrow t_v = 1 \quad \forall$ vértice ady. a los vértices u

$\Rightarrow \dots$

$\Rightarrow t_v = 1 \quad \forall v$ vértice interior



Sea $f \in \mathcal{F}(G)$ una cara en una red plana $N = (E, \mathcal{F})$

La ~~frontera~~_{ext.} de f consiste de aristas $a_1, \dots, a_k \in E$

Si f no es simplemente conexo contiene huecos que corresponden a comp. aislados. Sean

$e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_\ell$ las aristas en los huecos.

(muchas aristas ocurren 2 veces en la secuencia, e.g. )

Sup. que la frontera exterior es orientada con el reloj y los huecos contra el reloj. (topológico)

Sea

$I_f^+ := \{i \in [\ell]: e_i \text{ en dirección de orientación}\}$

$I_f^- := \{i \in [\ell]: e_i \text{ en contra de la orientación}\}$

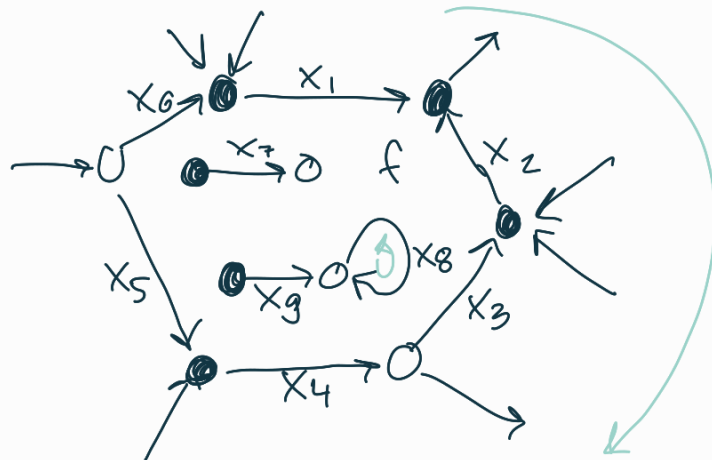
$$I_f^+ \cup I_f^- = [\ell]$$

Definimos el peso de la cara f

$$y_f := \prod_{i \in I_f^+} x_{e_i} \cdot \prod_{j \in I_f^-} x_{e_j}^{-1}$$



Ejercicio 1 Determina el peso de la cara f :



2 Verifica (en general) que $\prod_{f \in F} y_f = 1$

$$y_f = x_1 x_2^{-1} x_3^{-1} x_4^{-1} x_5^{-1} x_6 (x_7 x_7^{-1}) (x_8^{-1} x_9^{-1} x_9)$$

Sea $\mathbb{R}_{>0}^{F-1} \cong \mathbb{R}_{>0}^{|F|-1}$ el conjunto de pesos de caras

$$(y_f)_{f \in F} \in \mathbb{R}_{>0}^+ \text{ tales que } \prod y_f = 1.$$

Lema 11.2 Sea G una gráfica plana dirigida. Entonces

$$\varphi: \mathbb{R}_{>0}^E / \text{gauge} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}^{F-1}$$

$$(x_e)_{e \in E} \mapsto (y_f)_{f \in F}$$

(definido en $\star$) es un isomorfismo.

Prueba: Inducción sobre $C = \# \text{ comp. aislados en } G$

$C=0$ Inducción sobre F

$$\text{Lema 11.1} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}_{>0}^E / \text{gauge}) = \dim(\mathbb{R}_{>0}^{F-1})$$

$$\text{P.D. } \ker(\varphi) = \{ p_t \}$$

Sea $(x_e)_{e \in E}$ i.g. $\varphi((x_e)) = (1, \dots, 1)$. Suficiente mostrar que $\exists$ transf. gauge de $(x_e)_{e \in E}$ a $(1)_{e \in E}$.

Sea $f_0 \in F$ adyacente a la frontera

$\Rightarrow$ contiene un segmento (b_i, b_{i+1}) y un

$$\text{camino } P = (b_i, v_1, \dots, v_k, b_{i+1})$$

Podemos transformar todas las aristas en P a peso 1 con una excepción.

$$\text{Peso } 1 = y_{f_0} = \prod_{e \in P} x_e^{\pm 1} \Rightarrow x_e = 1 \quad \forall e \in P$$

$\Rightarrow$ base de la inducción $|F|=2$

Sea $G' = G \setminus \{f_0\}$ con $(b_i, b_{i+1}) \leftrightarrow P$

Inducción $\Rightarrow$ todos los pesos x_e $e \in E(G')$ se pueden transformar a 1 //

$C \gg 1$ Sea $G' = G \setminus G''$ donde G'' es una comp. dis. de G contenido en una cara $f \in F$.

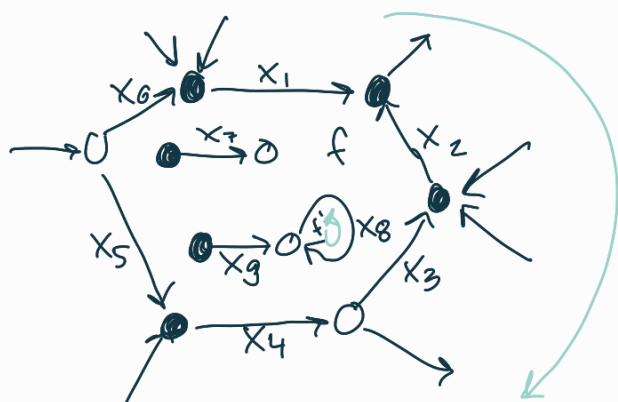
Sean $E' = E(G')$, $F' = F(G')$, $E'' = E(G'')$ y $F'' = F(G'')$

y $\tilde{E}'' \subset E''$ el conjunto de aristas interiores de G''

Los pesos de caras $y_{f'}$ con $f' \in F'$ o F'' coinciden con los pesos en G , con única excepción de f :

$$y_{f_G} = y_{f_{G'}} \cdot \prod_{f' \in F''} y_{f'}$$

Ejemplo:



$$y_{f_G} = x_1 x_2^{-1} x_3^{-1} x_4^{-1} x_5^{-1} x_6^{-1} x_7^{-1} x_8^{-1} x_9^{-1}, \quad y_{f_{G'}} = x_1 x_2^{-1} x_3^{-1} x_4^{-1} x_5^{-1} x_6^{-1}$$

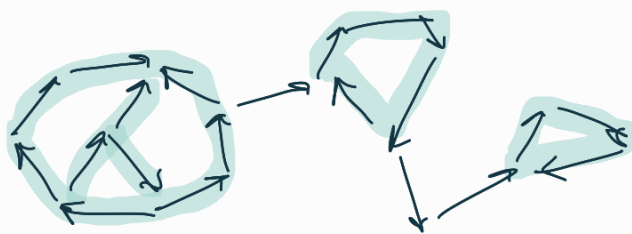
$$F'' = \{f'\} \quad \prod_{f' \in F''} y_{f'} = x_8^{-1}$$

$$\text{Inducción } \Rightarrow R_{>0}^{E'} / \text{gauge} \cong R_{>0}^{F'-1}$$

$$\text{Si } F'' = \emptyset : R_{>0}^E / \text{gauge} \cong R_{>0}^{E'} / \text{gauge} \cong R_{>0}^{F'-1} = R_{>0}^{F-1}$$

G es un árbol

Si $F'' \neq \emptyset$ dividimos G'' en subgráficas $G_1, \dots, G_k$ disjuntas y conexas por caminos tal que cada G_i consiste de un ciclo con una gráfica dentro



Cada cara de G'' es cara de alguna G_i .

$$\text{Inducción en } G_i \Rightarrow \mathbb{R}_{>0}^{\tilde{E}''} / \text{gauge} \cong \mathbb{R}_{>0}^{F''-k}$$

En cada ciclo podemos hacer transf. de gauge tal que todos menos un peso son 1 y el ultimo peso puede ser arbitrario (no afecta a $\gamma_t \in F''$ pues es en la frontera de G'') $\Rightarrow \mathbb{R}_{>0}^{\tilde{E}''} / \text{gauge} \cong \mathbb{R}_{>0}^{F''}$

$$\text{Entonces, } \mathbb{R}_{>0}^{\tilde{E}''} / \text{gauge} \cong \mathbb{R}_{>0}^{F''-1} \times \mathbb{R}_{>0}^{F''} \cong \mathbb{R}_{>0}^{F''}$$



Consecuencias:

$\rightarrow$ Med $_G$ en términos de caras $\mathbb{R}_{>0}^{F-1} \rightarrow \text{Gran}$ ya no requiere transf. gauge y no requiere inversas al cambiar orient.

Sea $P: b_i \rightarrow b_j$ un camino dirigido sin autointer.

$\Rightarrow P$ divide el disco en 2 partes:

- su lado derecho $D(P)$
- su lado izquierdo $I(P)$

Definición: $\text{wt}(P, \gamma) := \prod_{f \in D(P)} \gamma_f$ el peso de P

Para un ciclo C cerrado orientado con reloj (resp. contra reloj) definimos

$$wt(C, \gamma) = \prod_{f \in C} \gamma_f \quad (\text{resp. } wt(C, \gamma) = \prod_{f \notin C} \gamma_f)$$

Para P un camino arbitrario definimos

$$wt(P, \gamma) = wt(\tilde{P}, \gamma) \cdot \prod_{C \text{ ciclo en } P} wt(C, \gamma)$$

camino obtenido de P eliminando ciclos

Lema 11.4 Sea P un camino dirigido arbitrario

$$\Rightarrow wt(P, \gamma) = \prod_{e \in P} x_e$$

Tarea: verificar el lema para P sin autointersección y para C un ciclo cerrado.

La medida de frontera (formal) en variables de caras es

$$M_{ij} = \sum_{P: b_i \rightarrow b_j} (-1)^{\text{vueltas}(P)} wt(P, \gamma)$$

Definición 11.5 Una **gráfica plabic** (plana y bicolorada) es una gráfica plana (no dirigida) en un disco con n vértices en la frontera $b_1, \dots, b_n$ (en orden reloj) cada una adyacente a una sola arista junto con una aplicación $col: V \rightarrow \{\pm 1\}$ en el conjunto de vértices interiores V ($+1 \rightsquigarrow \bullet$ y $-1 \rightsquigarrow \circ$)

Una **red plabic** $N = (G, \gamma)$ es una gráfica plabic G con pesos $\gamma_f \in \mathbb{R}_{>0}$ en caras f de G t.q. $\prod_f \gamma_f = 1$.

Una **orientación perfecta** de una gráfica plabic G es una orientación de sus aristas que cumple



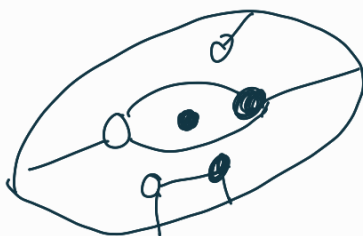
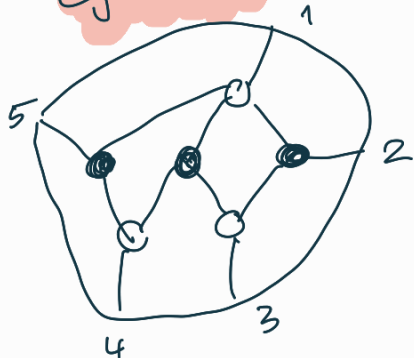
G es **perfectamente orientable** si tiene una orientación perfecta. G es de tipo (k, n) si tiene n vértices frontera y

$$k + (n - k) = \sum_{v \in V} \text{col}(v) (\deg(v) - 2)$$

Lema 9.4 $\Rightarrow$ cada orientación perfecta de una gráfica plabic tipo (k, n) tiene k fuentes y $(n - k)$ pozos.

$$\Rightarrow \tilde{\text{Med}} : \left\{ \begin{array}{l} \text{red plabic} \\ \text{tipo } (k, n) \\ \text{perf. orientable} \end{array} \right\} \longrightarrow \text{Grun}^{\text{tm}}$$

Ejercicio: Determina si es perfectamente orientable:



Sea G gráfica plabic de tipo (k, n) y Θ una orientación perfecta de G con conjunto de fuentes $I_\Theta \in \binom{[n]}{k}$. Definimos el **matroide** de G

$$\mathcal{M}_G = \{ I_\Theta \mid \Theta \text{ es orientación perfecta de } G \}$$

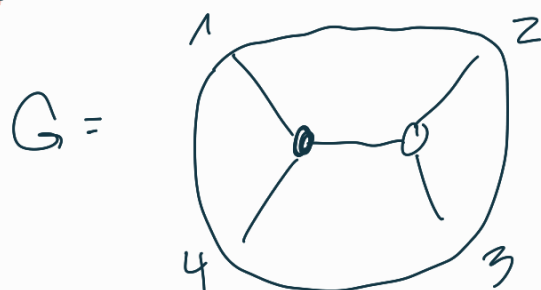
Prop. 11.7 Para cada gráfica planic perfectamente orientable G $\mathcal{M} = \mathcal{M}_G$ es un positróide.
Además $\tilde{\mathcal{M}}_{\text{Med}_G}(\mathbb{R}_{>0}^{F(G)-1}) \subseteq S_{\text{eu}}^{+mn} \quad \star$

Comentarios. $\star$ de hecho es una igualdad (Cor. 16.5)

- Prop. 11.7 permite calcular S_{eu}^{+mn} (dada una red) de manera combinatoria (sin calcular medidas de frontera)

Ejercicio: (1) Determina todas las orientaciones perfectas

de



(2) Prueba la Prop. 11.7.

Dado G y Θ definimos el **matroide de caminos**

$$\mathcal{M}_G^\Theta := \left\{ J \in \binom{[n]}{k} : \exists \text{ colección de caminos sin intersecciones por pares de } \{b_i : i \in I_\Theta\} \text{ a } \{b_j : j \in J \setminus I_\Theta\} \right\}$$

Recuerda que podemos suponer que G es bipartita.
Un emparejamiento parcial de tal G es una colección M de aristas tal que cada vértice ady. a M esté ady. a una sola arista en M . Además supongamos que cada b_i es ady. a Θ .
(si necesario agregamos vértices de grado 2)

Definimos

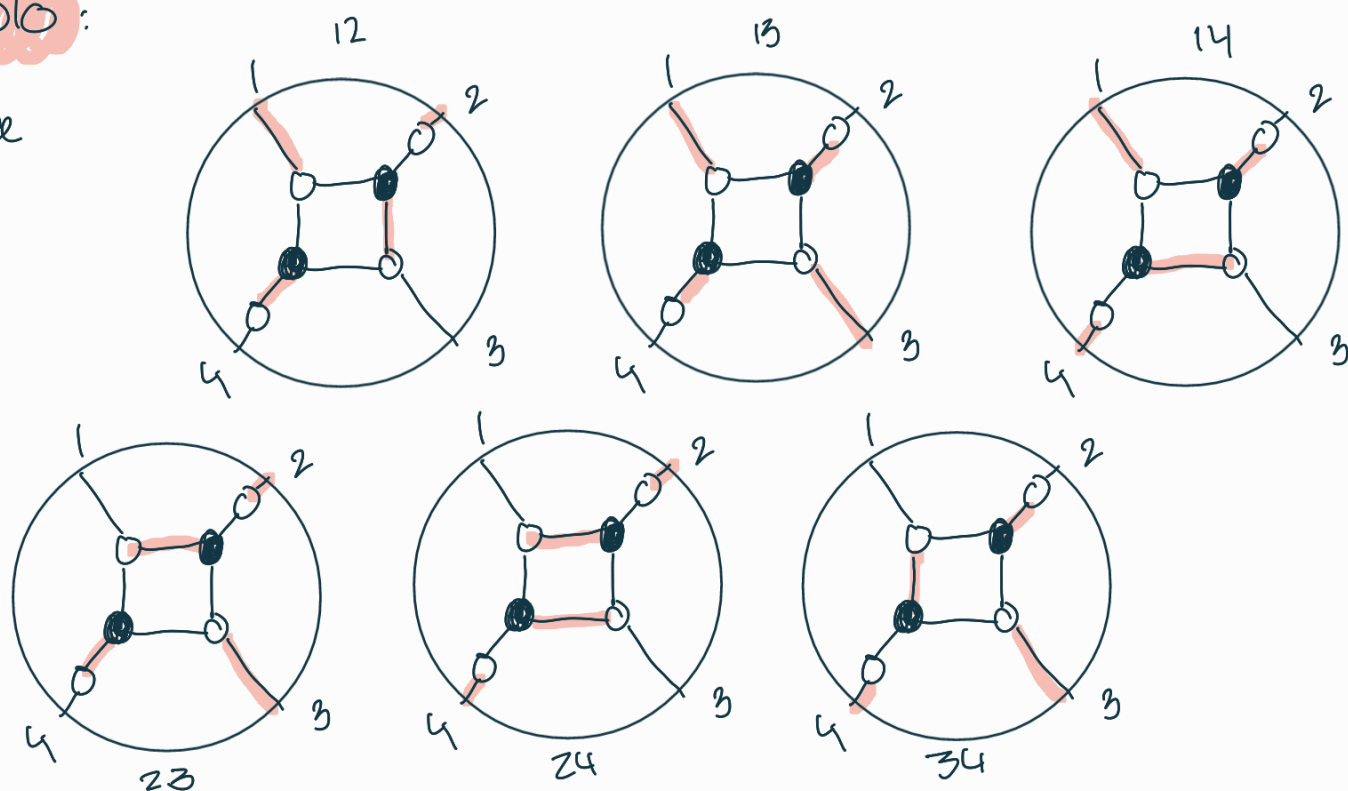
$$I_M = \{ i \in [n] : b_i \text{ ady. a } M \}$$

el **matroide de emparejamientos** de G es

$$\mathcal{M}_G^{\text{par}} = \{ I_M : M \text{ es emparejamiento parcial de } G \}$$

Ejemplo:

Calcular
par
 M_G



Lema 11.10 Sea G una gráfica planar, entonces $M_G^\circ = M_G$.
Si G es bipartita, entonces $M_G = M_G$.

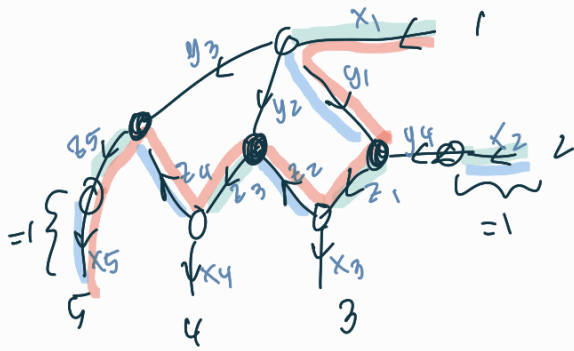
Prueba: Cada orientación perfecta Θ' se obtiene de Θ cambiando orientaciones de flechas en una familia de caminos dirigidos sin intersecciones por pares entre vertices de la frontera o ciclos cerrados.
 $\Rightarrow M_G^\circ = M_G$

Para Θ orientación perfecta en una gráfica bipartita sea M el conjunto de aristas $\bullet \rightarrow \circ$

$$\Theta \mapsto M$$

es una biy. entre orientaciones perfectas y emparejamientos perfectos

$$\Rightarrow M_G^{\text{par}} = M_G^\circ = M_G \quad \square$$



Pre: x_1, x_2, z_1, z_3, z_5

flow: $x_1, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, x_5$

p_μ : x_2, x_5, y_1, z_2, z_4

$$\text{flow} = \text{pre} \cdot p_\mu$$

more generally

$$\text{flow}_I = \sum_{\mu, \partial\mu = I} \text{pre} \cdot p_\mu$$