Teorema: La Grassmanniana $Gr_{d,n} \subset \mathbb{P}(\Lambda^d V)$ es el conjunto de ceros de los siguientes polinomios de grado 2:

$$\sum_{l=1}^{d+1} (-1)^l \, p_{i_1 \cdots i_{d-1}, j_l} \, p_{j_1,\dots,\hat{j}_l,\dots,j_{d+1}} \qquad \star$$

donde $\{i_1,\dots,i_{d-1}\} \in \binom{[n]}{d-1}$ y $\{j_1,\dots,j_{d+1}\} \in \binom{[n]}{d}$

Prueba del Teorema "$\subset$"

Fijamos $1 \le i_1,\dots,i_{d-1}, j_1,\dots,j_{d+1} \le n$ y $U \in Gr_{d,n}$ representado por la matriz A. Evaluamos ($\star$) en U, entonces

$$\sum_{l=1}^{d+1} (-1)^l \Delta_{i_1,\dots,i_{d-1},j_l}(A)\,\Delta_{j_1 \dots \hat{j}_l \dots j_{d+1}}(A)$$

Laplace en columna j_l

$$= \sum_{l=1}^{d+1} (-1)^l \left(\sum_{m=1}^{d} (-1)^{d+m} a_{m,j_l} \Delta_{[d]\setminus m,\underline{i}}(A) \right) \Delta_{j_1,\dots,\hat{j}_l,\dots,j_{d+1}}(A)$$

$$= \sum_{m=1}^{d} (-1)^{d+m} \Delta_{[d]\setminus m,\underline{i}}(A) \sum_{l=1}^{d+1} (-1)^l a_{m j_l} \Delta_{j_1,\dots,\hat{j}_l \dots j_{d+1}}(A)$$

$\Delta_{[d],\, j_1 \dots \hat{j}_l \dots j_{d+1}}$

Laplace al reverse

$$= \sum_{m=1}^{d} (-1)^{d+m+1} \Delta_{[d]\setminus m,\underline{i}}(A) \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_{d+1}} \\ a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_{d+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{dj_1} & \cdots & a_{dj_{d+1}} \end{pmatrix}} = 0$$

esta matriz tiene la fila $(a_{mj_1},\dots,a_{mj_{d+1}})$ dos veces

$\Rightarrow$ $Gr_{d,n}$ es en el conjunto de ceros de los polinomios ($\star$)

"$\supset$" Sea $[q_{\underline{i}}]_{\underline{i} \in I_{d,n}}$ en el conjunto de ceros de ($\star$)

Sea $q_{\underline{l}} = 1$ para algún $\underline{l} \in I_{d,n}$. Definimos para $i \in [d], j \in [n]$

$$a_{ij} = q_{l_1,\dots,l_{i-1},j,l_{i+1},\dots,l_d} \quad \text{y} \quad A := (a_{ij})$$

Nota que $A_{l_1,\dots,l_d} = \mathbb{1}_d \Rightarrow \text{rango}(A) = d$.

P.D. $\Delta_{\underline{i}}(A) = q_{\underline{i}} \quad \forall\, \underline{i} \in I_{d,n}$

Procedemos por inducción decreciente en $|\underline{l} \cap \underline{i}|$

$|\underline{l} \cap \underline{i}| = d-1$ En este caso $\underline{l}$ y $\underline{i}$ difieren en un solo índice

Entonces $\Delta_{\underline{i}}(A) = \Delta_{l_1,\dots,l_{i-1},j,l_{i+1},\dots,l_d}(A)$ para algún $i \in [d]$, $j \in [n]$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & & & a_{1j} & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & a_{ij} & & & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_{dj} & 0 & & 1 \end{bmatrix} = a_{ij}$$

Paso de inducción: Consideramos la relación de Plücker

$$q_{\underline{l}}\, q_{\underline{i}} + \sum \pm\, q_{\underline{l}'} q_{\underline{i}'} = 0 \quad \bigstar$$

donde $\underline{l}'$ y $\underline{l}$ difieren en el último índice

además $|\underline{i}' \cap \underline{l}| > |\underline{i} \cap \underline{l}|$ porque una entrada de $\underline{i}$ fue reemplazada por l_d.

Por inducción obtenemos $\Delta_{\underline{l}'}(A) = q_{\underline{l}'}$ y $\Delta_{\underline{i}'}(A) = q_{\underline{i}'}$

Además ya sabemos que la relación ★ se anula en A de la primera parte de la prueba.

$$\Rightarrow \quad \Delta_{\underline{l}}(A)\, \Delta_{\underline{i}}(A) = q_{\underline{l}}\, q_{\underline{i}}$$

$\Delta_{\underline{l}}(A) = q_{\underline{l}}$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{\underline{i}}(A) = q_{\underline{i}} \qquad \square$$

§ Células de Schubert

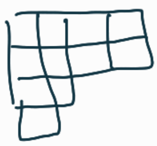
Definición: Una **partición** $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ (con k partes) es una secuencia de números enteros no negativos que cumple $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$

Se puede representar gráficamente por un **diagrama de Young** que es una colección de cajitas con índices

$$(i,j) \qquad 1 \leq i \leq k\,, \quad 1 \leq j \leq \lambda_i$$

que se colocan en el plano como si fueran entradas de una matriz:

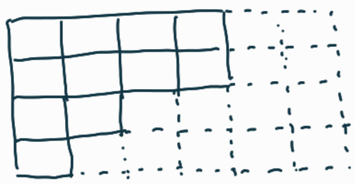
Ejemplo: $\lambda = (4,4,2,1)$



\# cajas
4
4
2
1

Existe una descomposición de la Grassmanniana en una unión disjunta de células de Schubert Ω_λ donde λ es una partición cuyo diagrama de Young cabe en un rectangulo $k\times(n-k)$, es decir $n-k \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$.

Ejemple: $\lambda = (4,4,2,1) \subset 4\times 6$ - rectangulo



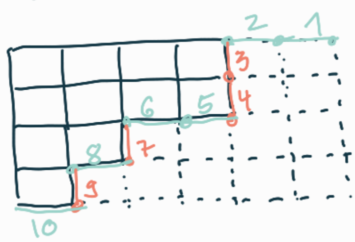
Tenemos una biyección entre

$$\binom{[n]}{k} \longleftrightarrow \{\lambda \subset k\times(n-k)\}$$

que se establece como sigue:
El diagrama de Young de λ en el rectangulo $k\times(n-k)$ tiene una frontera sur / este que es un camino de la esquina nor-este a la esquina sur-oeste de $k\times(n-k)$. Este camino tiene $\underbrace{k \text{ pasos en dirección sur}}_{= I(\lambda)}$ y $n-k$ pasos en dirección oeste

Entonces, $\lambda \longmapsto I(\lambda)$

Ejemplo: $\lambda = (4,4,2,1) \subset 4\times 6$ - rectangulo



$I(\lambda) = \{3,4,7,9\}$

Al revers, cada $I \in \binom{[n]}{k}$ determina un único camio de NE a SO en $k\times(n-k)$ cuyos pasos sur son en $I(\lambda)$.
Así $\underset{\{i_1,\dots,i_k\}}{\overset{}{I}} \longleftrightarrow \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ con $\lambda_j = |[i_j,n] \setminus I|$

Ejemplo: $I=\{3,4,7,9\} \Rightarrow \lambda_1 = |[3,10]\setminus\{3,4,7,9\}| = |\{5,6,8,10\}| = 4$

$\lambda_2 = |[4,10]\setminus I| = |\{5,6,8,10\}| = 4$

$\lambda_3 = |[7,10]\setminus I| = |\{8,10\}| = 2$

$\lambda_4 = |[9,10]\setminus I| = |\{10\}| = 1$ //

Definición: Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^n = V$.
Un subespacio U de V de dim. k pertenece a la célula de Schubert Ω_λ si satisface

$$\dim(U \cap \underbrace{\langle e_i,\dots,e_n\rangle}_{\text{subespacio de } V}) = |I(\lambda)\cap[i,n]|$$

para todos $i=1,\dots,n$

Para verificar si $U\in Gr_{k,n}$ pertenece a Ω_λ podemos usar una representación de U en forma de una matriz $A\in Mat_{k\times n}$. Con la eliminación de Gauss operando en las filas de A podemos cambiar A por una matriz escalonada reducida, es decir una matriz $A=(a_{ij})_{i\in[k], j\in[n]}$ que satisface

$$a_{1i_1} = a_{2i_2} = \dots = a_{ki_k} = 1 \quad \text{para } I=\{i_1<\dots<i_k\}\in\binom{[n]}{k}$$

y todas las entradas a mano izquierda (a_{jl} con $l<i_j$)
y todas las entradas en la misma columna (a_{li_j} $l\neq j$)
son cero.

En este caso decimos que A es en forma I-escalonada.

Ejemplo: $I=\{3,4,7,9\}$ $n=10$ una matriz en I-forma escalonada es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} & & 3 & 4 & & & 7 & & & \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \end{array}$$

donde $*\in\mathbb{R}$ son arbitrarios.

Ejercicio: Verifica que cada espacio vectorial $U \in Gr_{k,n}$ generado por las columnas de una matriz A en $\{3,4,7,9\}$-forma escalonada satisface

$$\dim\left(U \cap \langle e_i, \dots, e_{10} \rangle \right) = \left| \{3,4,7,9\} \cap [i,10] \right|$$

$\forall \; i = 1, \dots, 10.$

Lema: Sea $\lambda \subseteq k \times (n-k)$. Entonces

$$\Omega_\lambda = \left\{ U \in Gr_{k,n} : U \text{ tiene una representación de una matriz } A \text{ en forma } I(\lambda)\text{-escalonada} \right\}$$

Prueba: **Tarea**

Nota que las $*$ en la I-forma escalonada de la matriz reflejan el diagrama de Young de la partición λ con $I = I(\lambda)$. Como las $*$ se pueden escoger sin restricciones en $\mathbb{R}$ obtenemos

$$\Omega_\lambda \overset{\text{homeo}}{\simeq} \mathbb{R}^{|\lambda|} \qquad \text{donde } |\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$$

Ejemplo:

$$\left\{ A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & 3 & 4 & & & 7 & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \end{array} \right\} \cong \mathbb{R}^{11}$$

Nota también que $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu = \emptyset$ si $\lambda \neq \mu$ pues la forma escalonada reducida de una matriz es única.

Teorema La Grassmanniana tiene una descomposición en conjuntos disjuntos:

$$Gr_{k,n} = \bigcup_{\lambda \subseteq k \times (n-k)} \Omega_\lambda \overset{\text{homeo.}}{\simeq} \bigcup_{\lambda \subseteq k \times (n-k)} \mathbb{R}^{|\lambda|}$$

§ Matroides

Definición: Un matroide de rango k en $[n]$ es una colección

$$\mathcal{M} \subseteq \binom{[n]}{k} \quad \text{de bases}$$

que satisfacen el axioma de intercambio:

$$\forall\, I, J \in \mathcal{M} \text{ y } i \in I \;\exists\, j \in J \text{ t.q. } (I \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathcal{M}.$$

La noción esta inspirada en el cambio de base en espacios vectoriales

Dado $U \in Gr_{k,n}$ representado por una matriz $A \in Mat_{k\times n}(\mathbb{R})$ definimos el matroide de U

$$\mathcal{M}_U := \left\{ I \in \binom{[n]}{k} : \Delta_I(A) \neq 0 \right\}$$

Equivalentemente, $I \in \mathcal{M}_U \iff \{v_i : i \in I\}$ es una base de $\mathbb{R}^k$.

columnas de A

Ejercicio: Verifica que $\mathcal{M}_U$ satisface el axioma de intercambio.
(recuerda las relaciones de Plücker)

Definimos estratos de matroides de la Grassmanniana

$$S_{\mathcal{M}} := \{ U \in Gr_{k,n} : \mathcal{M}_U = \mathcal{M} \}$$

Si $\mathcal{M}$ es un matroide de rango k en $[n]$ con $S_{\mathcal{M}} \neq \emptyset$ se llama realizable sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{define } U \in Gr_{4,10}$$

entonces

$$\mathcal{M}_U = \{ 3479, 3579, 3679, 4579, 4789, 5679, \\ 3489, 3589, 3689, 4589, 5789, 5689 \}$$

Nota que si A es en I-forma escalonada entonces $I \in M_U$ es la base minimal en el orden lexicográfico. Concluimos

Lema: $\Omega_\lambda = \{ U \in Gr_{kn} : I(\lambda) \in M_U$ es la base lex.-min.$\}$

Ejercicio: Da un ejemplo de dos matrices en $Mat_{3,6}(\mathbb{R})$ en $\{1,3,4\}$-forma escalonada con matroides distintos.

Pero al mismo tiempo tenemos:

Lema Si $U, U' \in Gr_{kn}$ son tales que $M_U = M_{U'}$ entonces $\exists\, \lambda \in k \times (n-k)$ con $U, U' \in \Omega_\lambda$

prueba: Sean A y A' matrices en forma escalonada reducida representando U y U'. Sea $I \in M_U = M_{U'}$ el conjunto lex-min. Entonces, $U, U' \in \Omega_\lambda$ con λ t.q. $I = I(\lambda)$. $\square$

Corolario: La descomposición de Gr_{kn} en estratos de matroides es más fina que la descomposición en células de Schubert.

Observa que la descomposición de Schubert depende de un orden en la base estandar $(e_1, \dots, e_n)$. Podemos cambiar el orden con una permutación $w \in S_n$. Definimos

$$\Omega_\lambda^w := w(\Omega_\lambda)$$

Su acción en las columnas de una matriz en Mat_{kn}

Es decir, $\Omega_\lambda^w \subset Gr_{kn}$ consiste de tales U con $I(\lambda)$ base w-lex-min en M_U con respecto al orden $w(1) < w(2) < \dots < w(n)$ en $[n]$.

Teorema [Gelfand-Goresky-MacPherson-Serganova]
La descomposición de Gr_{kn} en estratos de matroides S_M es el refinamiento común de los $n!$ descomposiciones en células de Schubert $Gr_{kn} = \bigcup_{\lambda \in k \times (n-k)} \Omega_\lambda^w$, $w \in S_n$.

Idea: Si conocemos la base w-lex-min de M_u $\forall w \in S_n$ $\Rightarrow$ conocemos todas las bases de M_u y por lo tanto conocemos el estrato de matroid de u.

Ejemplo $n=4$, $k=2$

12	13	23	14	24	34	$I(\lambda)$

$$\Omega_{\boxplus} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix} \right\} \ni \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A \qquad M_u = \{12, 13, 23, 24, 34\}$$

lex-min

$12 <_{lex} 13 <_{lex} 23 <_{lex} 24 <_{lex} 34$

$w = [1342]$ $\qquad 13 <^{w}_{lex} 12 <^{w}_{lex} 34 <^{w}_{lex} \;<^{w}_{lex} 32 <^{w}_{lex} 42$

$1<3<4<2$

$\Rightarrow$ 13 is $[1342]$-lex. minimal

$$\Omega^{w}_{(2,1)} = w\,\Omega_{(2,1)} = w\left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \ni A \qquad \checkmark$$