§9 Perfección por trivalencia

Objetivo: Simplificar una red plana N sin cambiar sus medidas de frontera M_{ij}

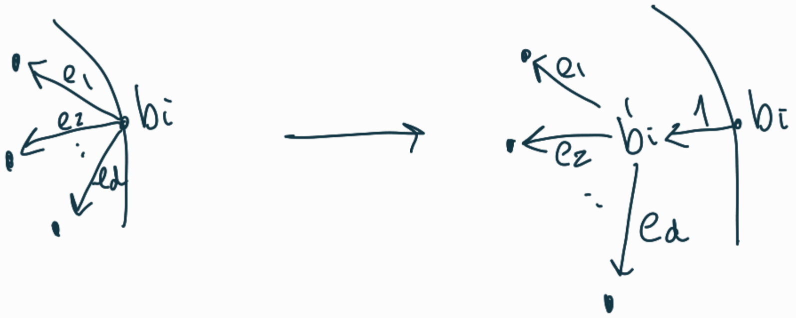
① Si N contiene fuentes o pozos internos se pueden eliminar junto con sus aristas adyacentes.

② Si N contiene un vertice interno de grado 2, se puede eliminar:

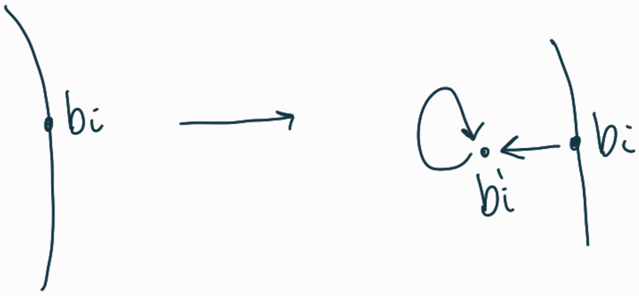
$$a \xrightarrow{x_{e_1}} \bullet \xrightarrow{x_{e_2}} b \quad \longrightarrow \quad a \xrightarrow{x_{e_1} x_{e_2}} b$$

③ Si b_i es un vertice frontera (supongamos que es fuente) con grado $d \neq 1$

$d > 1$



$d = 0$



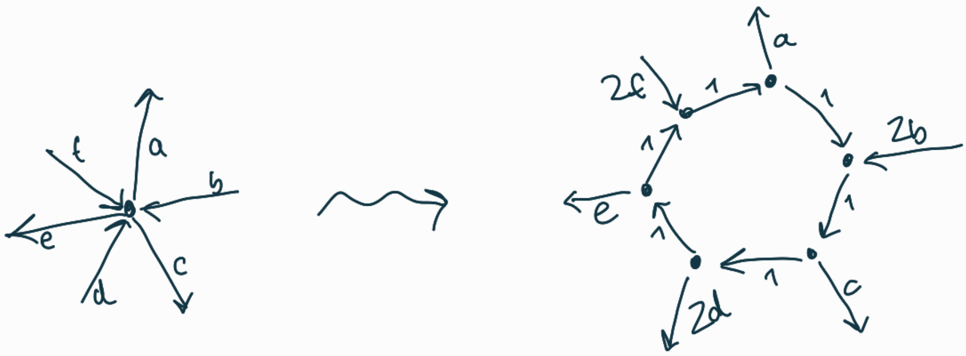
Procedemos de manera analoga si b_i es un pozo de grado $d \neq 1$.

Ejercicio: Verifica que las transformaciones locales ①-③ no cambian las medidas de frontera.

④ Supongamos que N contiene un vértice interno v de grado $d > 3$. con aristas adyacentes $e_1, \dots, e_d$

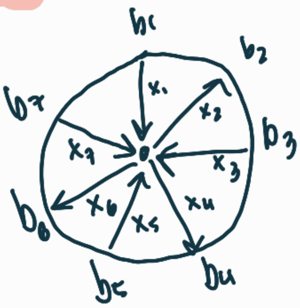
- Si e_i y e_{i+1} tienen las misma orientación (hacia v por ejemplo)

- Si las orientaciones de $e_1, \dots, e_d$ son alternantes:



eliminamos v y lo reemplazamos por un d-ciclo orientado con pesos 1. Además duplicamos los pesos de aristas hacia v

Ejercicio: Calcula las medidas de frontera de la red

$N =$ 

y de su versión reducida según ④.

Lema 9.1 Las transformaciones locales ①-④ no cambian las medidas de frontera

Prueba: Nos enfocamos en la transformación ④.

Sean $v_1, \dots, v_d$ los vértices del ciclo donde la arista e_i es adyacente al vértice v_i. Asignamos el peso x_i a la arista $v_i \xrightarrow{x_i} v_{i+1}$.

Sea P un camino dirigido en la red original N que pasa por v entrando por la arista e_i y saliendo por la arista e_j. Supongamos $i<j$. En la nueva red N' tenemos una familia infinita de caminos P' que entran por e_i al ciclo, toman s vueltas completas y salen por e_j.

Nota que cada vuelta de P' en C cambia su número de vueltas. Por lo tanto el peso de P' es el peso de P multiplicado por

$$(-1)^s\, 2\, x_i \cdots x_{j-1} (x_1 \cdots x_d)^s \qquad s = \#\text{ vueltas completas en } C$$

factor de la arista e_i en N' cuyo peso es $2x_{e_i}$

$\Rightarrow$ La contribución a la medida de frontera correspondiente de N' es el peso de P multiplicado por

$$2x_i \cdots x_{j-1} \sum_{s\geq 0} (-1)^s (x_1 \cdots x_d)^s = \frac{2x_i \cdots x_{j-1}}{1+x_1\cdots x_d}$$

Si P pasa por v varias veces obtenemos el mismo factor con multiplicidad. Por lo tanto, si evaluamos $x_\ell = 0\ \forall \ell \in [d]$ la medida de frontera cambia

por $\dfrac{2\cdot 1}{1+1} = 1$ ■

Corolario: Cada red plana N se puede transformar a una red plana N' que cumple

- todos los vertices frontera tienen grado 1
- todos los vertices internos tienen grado 3

tal que las medidas de frontera de N y N' coinciden

En particular, la red N' solo tiene dos tipos de vertices internos: aquellos que tienen una única arista entrando y aquellos que tienen una única arista saliendo.

spin = 1 spin = -1

Definición: Una red perfecta N es una red plana t.q.

(1) $\forall v$ vertice interno $\exists!$ arista saliendo de v (y los demás entran a v) o $\exists!$ arista entrando a v (y los demás salen de v).

(2) Cada vertice frontera es de grado 1.

En particular:

Proposición 9.3 Cada red plana N se puede transformar en una red perfecta N' sin cambiar su medida de frontera.

Definimos para una red perfecta N

$$col_N : \{ v \text{ vertice interno de grado } \neq 2 \} \longrightarrow \{-1, 1\}$$

$$v \longmapsto \begin{cases} -1 & \exists! \longrightarrow v \\ 1 & \exists!\ v \longrightarrow \end{cases}$$

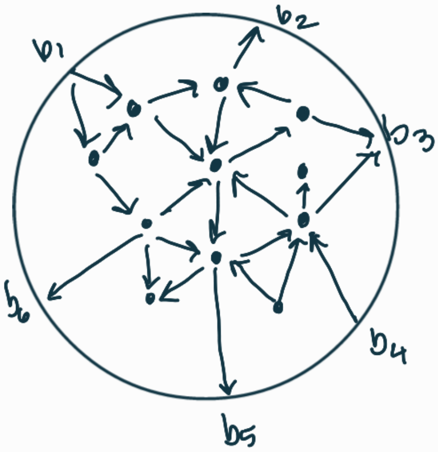
Si $\deg(v) = 2$ $col_N(v)$ puede ser ± 1.

Lema 9.4 Sea N una red perfecta, entonces

$$\sum_{\substack{v \text{ vertice interno} \\ \text{de } N}} col_N(v)\,(deg(v)-2) = k-(n-k)$$

donde $k = \#\{\text{fuentes frontera en } N\}$ y $n-k = \#\{\text{pozos frontera en } N\}$.

Ejercicio: Determina la red perfecta asociada y verifica el Lema 9.4:



Prueba: A cada arista $v_1 \xrightarrow{e} v_2$ asignamos dos números

$$v_1 \underset{-1}{} \xrightarrow{\;e\;} \underset{1}{} v_2$$

- La suma de todos los números es cero
- La suma de todos los números en un vertice v interno es $col_N(v)\cdot(deg(v)-2)$
- Las fuentes frontera tienen un -1 y los pozos un 1

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{\substack{v \text{ vertice} \\ \text{de } N}} col_N(v)\cdot(deg(v)-2)$$

$$= \sum_{\substack{v \text{ vertice} \\ \text{interno de } N}} col_N(v)\cdot(deg(v)-2) + \sum_{\substack{b_i \text{ vertice} \\ \text{frontera}}} col_N(b_i)\cdot(deg(v)-2)$$

$$= \sum_{\substack{v \text{ vertice} \\ \text{interno de } N}} col_N(v)\cdot(deg(v)-2) - k + n-k$$

$\square$