14/02/2023

Recuerda el teorema de Cauchy-Binet:

Corolario 1: Sean, $A,B \in M_n(\mathbb{R})$ invertibles y $I,J \in \binom{[n]}{k}$, $k \leq n$.

$$\Rightarrow \quad \Delta_{I,J}(AB) = \sum_{K \in \binom{[n]}{k}} \Delta_{I,K}(A)\,\Delta_{K,J}(B)$$

En particular, si A es TP y B TNN $\Rightarrow$ AB y BA son TP.

Ejercicio: Verifica que AB y BA son TP si A es TP y B TNN.

Tip: recuerda Laplace!

Notación: Sea $G = Gl_n(\mathbb{C})$ y $G_{\geq 0}$ (resp. $G_{>0}$) el conjunto de matrices TNN (resp. TP) en G.
(nota que $G_{>0}$ y $G_{\geq 0} \subset M_n(\mathbb{R})$)

Corolario: Tanto $G_{\geq 0}$ como $G_{>0}$ son cerrados bajo multiplicación, es decir son semigrupos.

Pregunta: ¿Son $G_{\geq 0}$ o $G_{>0}$ monoides?
↳ semigrupo con elemento neutro

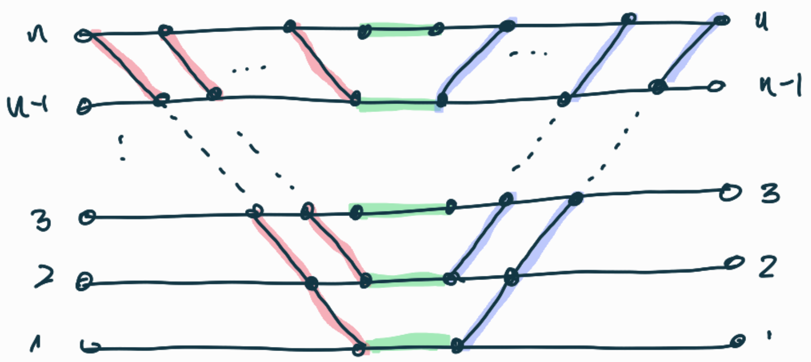
Teorema de Whitney:

Cada matriz TNN invertible es el límite de una secuencia de matrices TP.

Ejercicio: Busca una secuencia de pesos esenciales para Γ tal que el límite de las matrices de caminos ponderados es la identidad.

aristas coloreadas tienen peso $\neq 0$ y todas las demás peso $= 1$.

$\Gamma =$



Prueba Teo. de Whitney: Observa que la aplicación

menores iniciales $\simeq$ pesos esenciales para Γ — matrices TP

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n^2}_{>0} &\longrightarrow G_{>0} \\ \omega &\longmapsto W_{\Gamma,\omega} \end{aligned}$$

es continua. Sea $(\omega_k)_k$ una secuencia de pesos esenciales para Γ cuyo límite son los pesos 1 para las aristas verdes y 0 para las aristas azules y rojos

recuerda que peso $0 \Rightarrow$ podemos eliminar la arista
por lo tanto la red (ponderada) asociada al límite es

Concluimos $\lim_{k\to\infty} W_{\Gamma,\omega_k} = \mathbb{1}$.

Falta demostrar que cada matriz TNN $B \in G_{\geq 0}$ es el límite de una secuencia de matrices TP.
Observa que $\forall k$ $\quad B\cdot W_{\Gamma,\omega_k} \in G_{>0}$ (Corolario 1)

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} B\cdot W_{\Gamma,\omega_k} = B\cdot \mathbb{1} = B \quad \square$$

En la última clase vimos que cada matriz TP es la matriz de caminos de la red Γ con pesos esenciales adecuados. El objetivo de esta clase es dar una interpretación similar para matrices TNN.

Vamos a mostrar el siguiente resultado de Loewner con la combinatoria de las redes planas:

Teorema (Loewner-Whitney)

Cada matriz invertible totalmente no negativa es un producto de matrices elementales de Jacobi.

Idea de la prueba: definir redes para las matrices elementales de Jacobi y luego usar la correspondencia concatenar redes $\longleftrightarrow$ multiplicar matrices de caminos.

Definición: Escribimos $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ para la **matriz elemental** cuya entrada (i,j) es 1 y todos lo demás 0. Una **matriz elemental de Jacobi** es una matriz en G que se distingue de $\mathbb{1}$ en una sola entrada en el diagonal o inmediatamente arriba o abajo. Escribimos para $t \in \mathbb{C}$, $i \in [n-1]$

$$x_i(t) = \mathbb{1} + tE_{i,i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & t & & \vdots \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{\bar{i}}(t) = \mathbb{1} + tE_{i+1,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & t & 1 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y para $i \in [n]$, $t \in \mathbb{C}$

$$x_{ⓘ}(t) = \mathbb{1} + (t-1)E_{i,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & t & \\ & & & 1 \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Para $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tenemos $x_i(t), x_{\bar{i}}(t), x_{ⓘ}(t) \in G_{\geq 0}$.

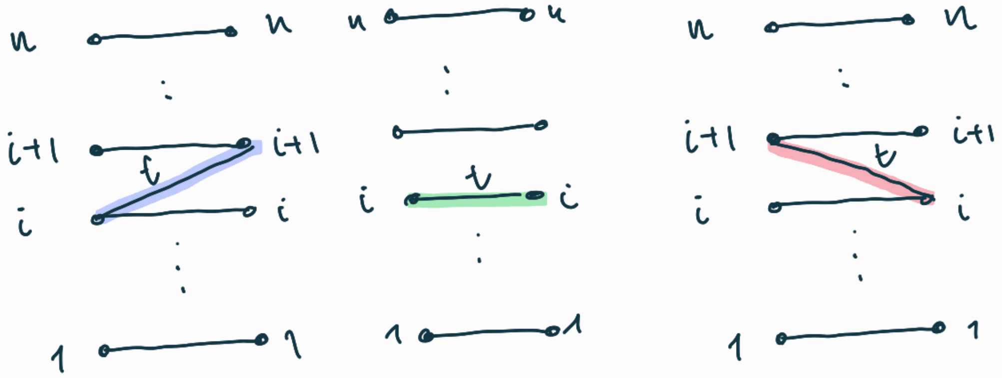
Definición: Sea $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n-1, ①, \ldots, ⓝ, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ un alfabeto. Para cada palabra $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_\ell)$ en $\mathcal{A}$ definimos la **aplicación del producto**

$$x_{\mathbf{i}} : (\mathbb{C}\setminus\{0\})^\ell \longrightarrow G$$
$$(t_1, \ldots, t_\ell) \longmapsto x_{i_1}(t_1)\, x_{i_2}(t_2) \cdots x_{i_\ell}(t_\ell)$$

El codominio es $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^\ell$ porque $x_{ⓘ}(0) \notin G$. Es más estricto que necesario pues $x_i(0)$ y $x_{\bar{i}}(0)$ son $\mathbb{1}$ en G.

Ejercicio: Sea $\mathbf{i} = (①, \bar{1}, ②, 1)$. ¿Cuál es la imagen de $x_{\mathbf{i}}$?

Definición: Definimos tres redes elementales ponderadas



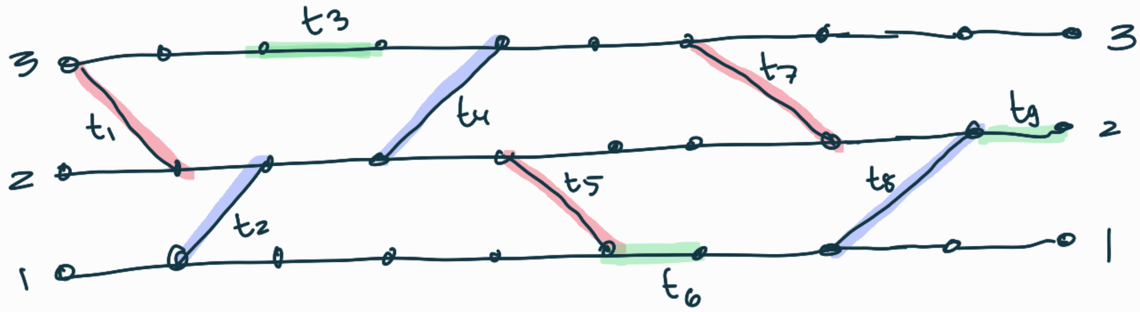
$\Gamma_i(t)$ $\qquad$ $\Gamma_{\textcircled{i}}(t)$ $\qquad$ $\Gamma_{\bar{i}}(t)$

Nota que las matrices de caminos ponderadas son $x_i(t)$, $x_{\textcircled{i}}(t)$ y $x_{\bar{i}}(t)$ respectivamente.

Sea $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_\ell)$ una palabra en $\mathcal{A}$. Definimos la red ponderada $(\Gamma(\mathbf{i}), \omega(t_1, \dots, t_\ell))$ como la concatenación de las redes elementales ponderadas

$$\Gamma_{i_1}(t_1) \circ \Gamma_{i_2}(t_2) \circ \dots \circ \Gamma_{i_\ell}(t_\ell)$$

Ejemplo: Sea $n=3$ y $\mathbf{i} = (\bar{2}, 1, \textcircled{3}, 2, \bar{1}, \textcircled{1}, \bar{2}, 1, \textcircled{2})$. Entonces la red $\Gamma(\mathbf{i})$ es



Ejercicio: ¿Cuál es la palabra $\mathbf{i}$ que cumple $\Gamma(\mathbf{i}) = \Gamma$?

la red que vimos al inicio de la clase

Definición: La palabra lexicográfica maximal es

$$\mathbf{i}_{max} = (n-1, n-2, n-1, \dots, 1, 2, \dots, n-1, \textcircled{1}, \textcircled{2}, \dots, \textcircled{n}, \overline{n-1}, \overline{n-2}, \overline{n-1}, \dots, \bar{1}, \dots, \overline{n-1})$$

Nota que $\mathbf{i}_{max}$ tiene longitud n^2.

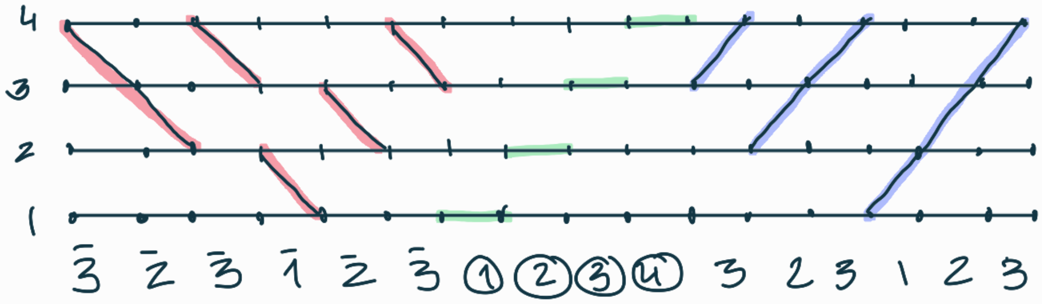
Tarea: Verifica que $x_{\mathbf{i}_{max}} : \mathbb{R}^{n^2}_{>0} \longrightarrow G_{>0}$ es la aplicación que manda una selección de pesos esenciales a la matriz de caminos de Γ asociada.

Ejemplo: Para $n=3$

$$\mathbf{i}_{max} = (\bar{3},\bar{2},\bar{3},\bar{1},\bar{2},\bar{3},①,②,③,④,3,2,3,1,2,3)$$

y su red es

$\Gamma(\mathbf{i}_{max}) =$



Corolario 1: La aplicación $x_{\mathbf{i}_{max}} : (\mathbb{C}\setminus\{0\})^{n^2} \longrightarrow G$ se restringe a una biyección entre $\mathbb{R}^{2}_{>0}$ y $G_{>0}$.

Prueba: Es una reformulación del teorema principal de la clase anterior.

Dado la aplicación $x_{\mathbf{i}_{max}}$ vamos a probar una versión más fuerte del Teorema de Loewner-Whitney:

Teorema (Cryer) Cada matriz $X \in G_{\geq 0}$ se puede escribir como

$$X = x_{\mathbf{i}_{max}}(t_1, \dots, t_{n^2})$$

para algunas $t_1, \dots, t_{n^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $t_k > 0 \ \forall\, k = ⓘ,\ i \in [n]$

Comentario: Recuerda el Lema de Cryer de la primera clase:

Cada matriz $A \in SL_n(\mathbb{R})$ es TNN si y solo si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde las matrices a mano derecha son TNN y unitarias.

Nota que el teorema de Cryer es una versión aún más fuerte.

$GL_n(\mathbb{C}) \ni U$ es unitaria si
$U^*U = UU^* = UU^{-1} = \mathbb{1}$
U^* es la traspuesta conyugada

La prueba de Cryer está basada en el siguiente lema:

Lema 1: Sea B una matriz TNN, entonces $\Delta_{[k],[k]}(B) > 0$ para cada $k \in [n]$.

se llama un menor principal líder.

Prueba: Procedemos por inducción en n $\Rightarrow$ es suficiente verificar que $\Delta_{[n-1],[n-1]}(B) > 0$. Recuerda la fórmula de Jacobi:

Para $1 \le i_1 < i_2 \le n$, $1 \le j_1 < j_2 \le n$, $I = [n] \setminus \{i_1, i_2\}$, $J = [n] \setminus \{j_1, j_2\}$

definimos $C = \begin{bmatrix} c_{i_1 j_1} & c_{i_1 j_2} \\ c_{i_2 j_1} & c_{i_2 j_2} \end{bmatrix}$ con $c_{ij} = \Delta_{I \cup \{i\}, J \cup \{j\}}(B)$

Entonces

$$\det(C) = \Delta_{I,J}(B) \det(B)$$

Tenemos

$$\det(C) = \Delta_{[n]\setminus i_1, [n]\setminus j_1}(B)\, \Delta_{[n]\setminus i_2, [n]\setminus j_2}(B) - \Delta_{[n]\setminus i_1, [n]\setminus j_2}(B)\, \Delta_{[n]\setminus i_2, [n]\setminus j_1}(B)$$

Supongamos que $\Delta_{[n-1],[n-1]}(B) = 0$. Como B es invertible y TNN sabemos (usando la expansión de Laplace) que $\exists\, i < n$ o $j < n$ t.q. $\Delta_{[n]\setminus i, [n-1]}(B) > 0$ o $\Delta_{[n-1], [n]\setminus j}(B) > 0$

Usamos la fórmula de Jacobi con $i_1 = i$, $j_1 = j$, $i_2 = j_2 = n$

Entonces,

$$-\Delta_{[n]\setminus i, [n-1]}(B)\, \Delta_{[n-1], [n]\setminus j}(B) = \det(B)\, \Delta_{[n-1]\setminus i, [n-1]\setminus j}(B) \ge 0 \quad \lightning$$

una contradicción

$\square$

Tarea: 2-Equivalencias de las redes planas Γ(ii)

Muestra que los siguientes cambios en las palabras no cambian la matriz de caminos asociada a la red:

1) $i_1 \cdots \, i \; j \, \cdots i_\ell \;\hat{=}\; i_1 \cdots \, j \; i \, \cdots i_\ell$

2) $i_1 \dots j\, i \dots i_\ell \simeq i_1 \dots i\, j \dots i_\ell$, $|i-j|>1$

3) ¿Cuales movimientos nos cumplen que las matrices de caminos sean iguales?