

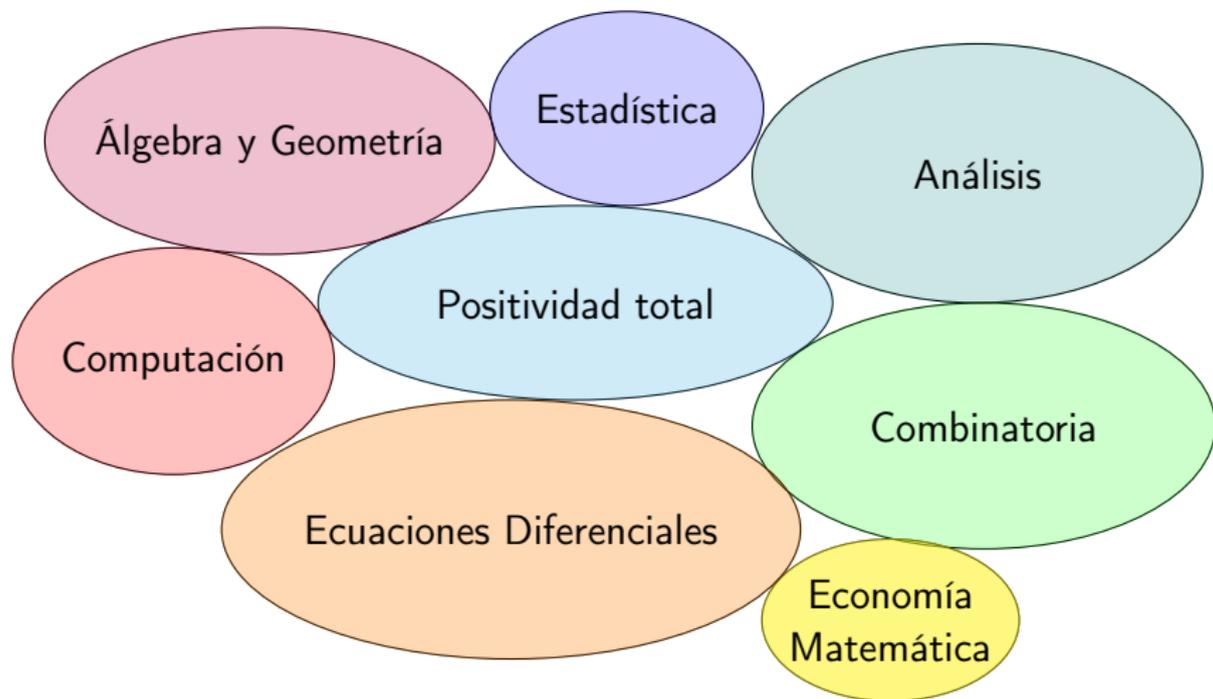
# Curso: Positividad Total

Lara Bossinger

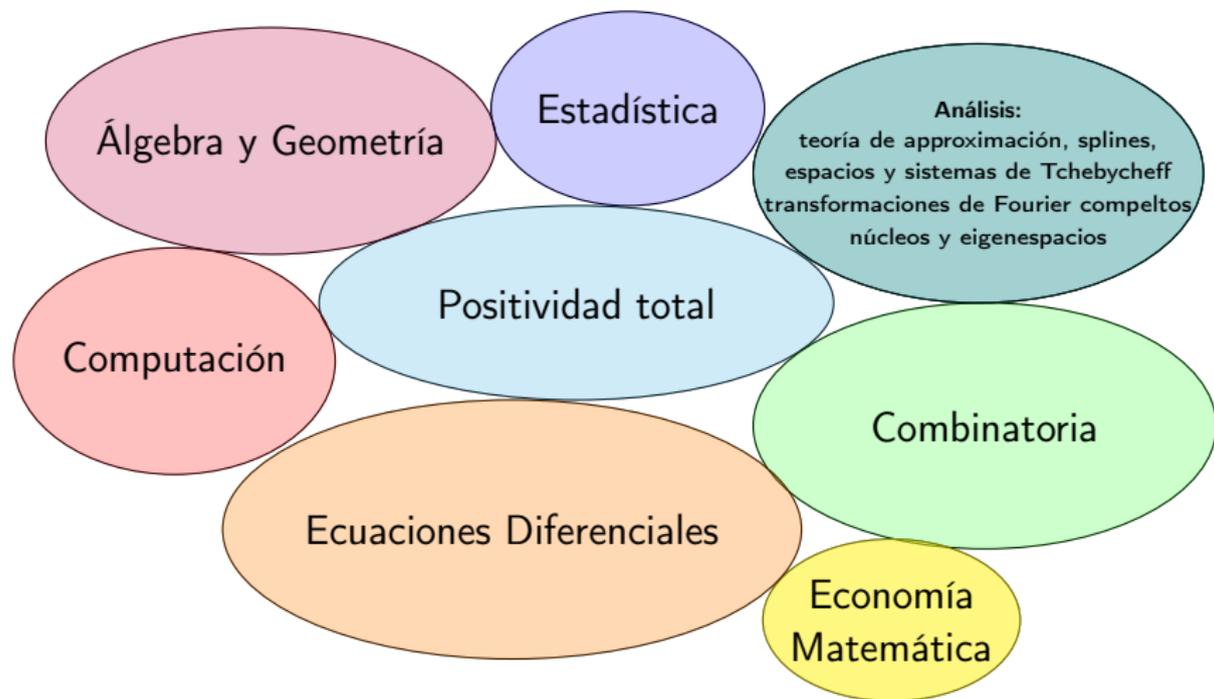
Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Enero 30 2022

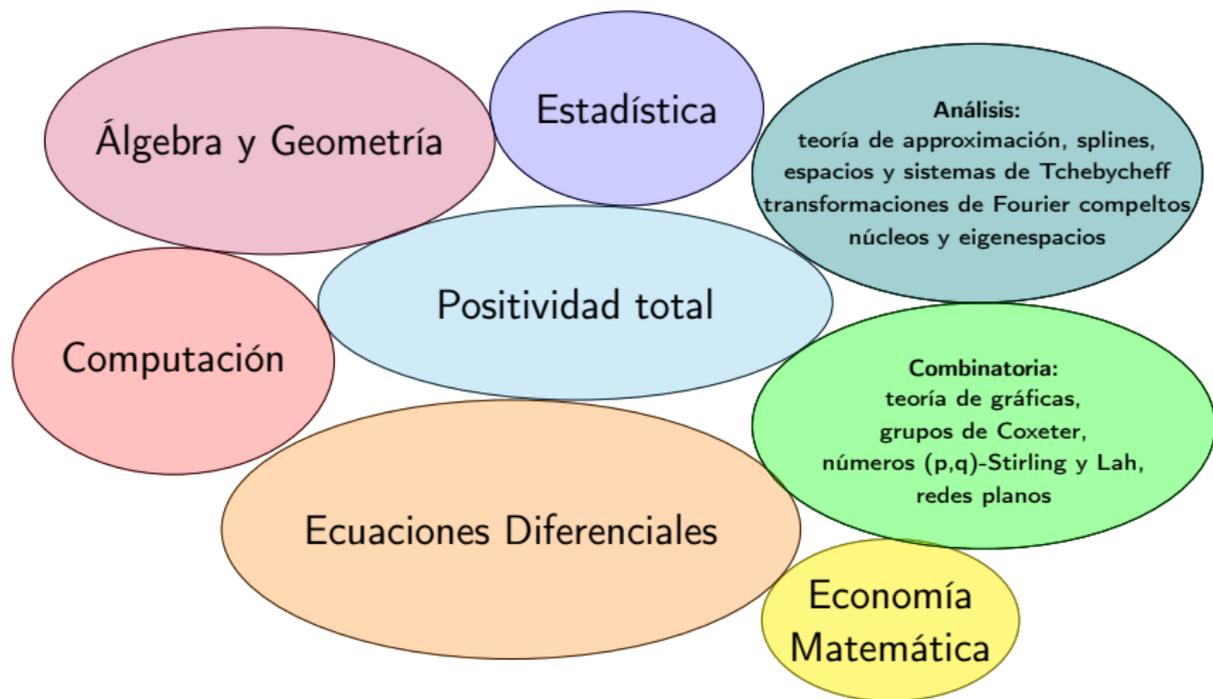
## ¿Donde encontramos la positividad total?



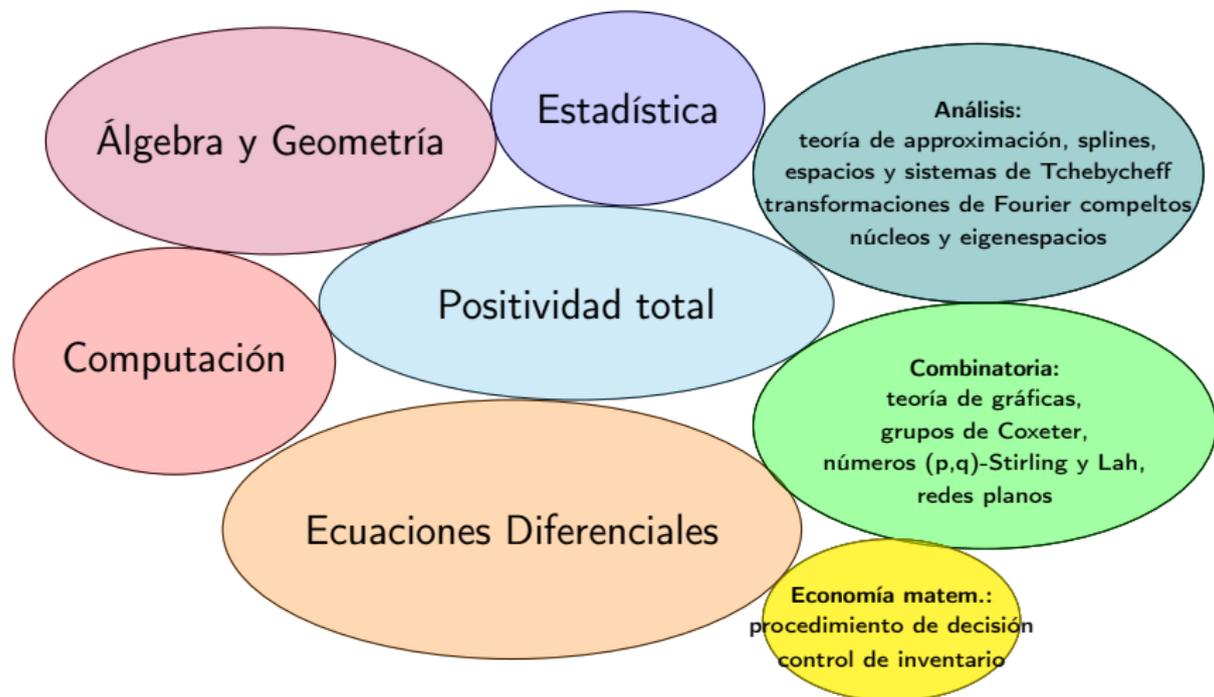
## ¿Donde encontramos la positividad total?



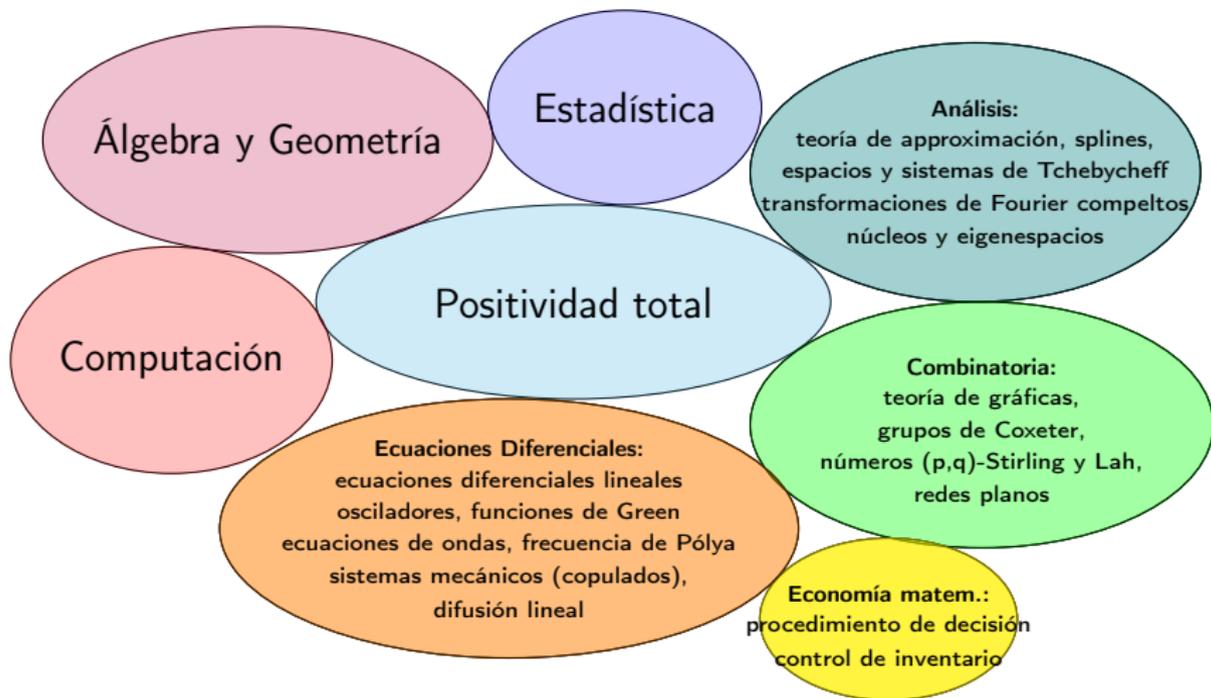
# ¿Donde encontramos la positividad total?



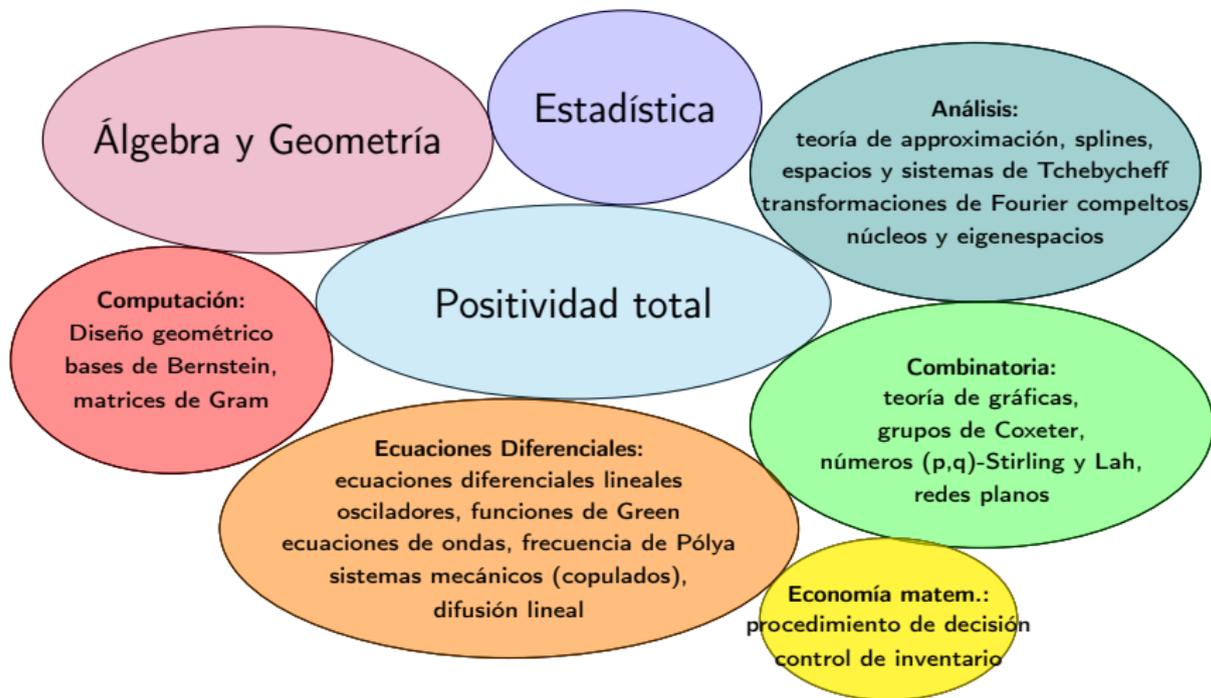
# ¿Donde encontramos la positividad total?



# ¿Donde encontramos la positividad total?



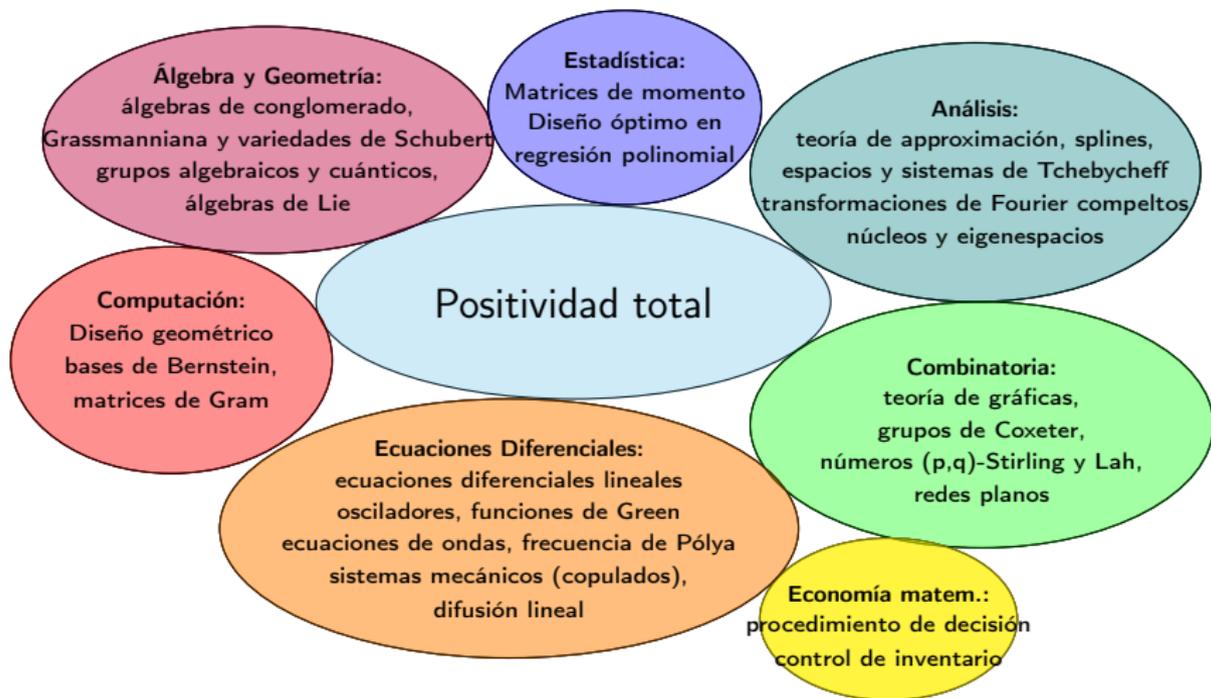
# ¿Donde encontramos la positividad total?



# ¿Donde encontramos la positividad total?



# ¿Donde encontramos la positividad total?



# Álgebra lineal

Nos acordamos que un *menor de una matriz* es una determinante de una submatriz cuadrada: sean  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,

$\mathfrak{i} = (1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n)$  y  $\mathfrak{j} = (1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq m)$  secuencias de números en  $[n] := \{1, \dots, n\}$ , resp.  $[m]$  con  $1 \leq p \leq \min\{n, m\}$ .

Entonces,  $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$  define una submatriz cuadrada de  $A$ :

$$A[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] := (a_{ij})_{i \in \mathfrak{i}, j \in \mathfrak{j}} = \begin{pmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \dots & a_{i_1, j_p} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \dots & a_{i_2, j_p} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{i_p, j_1} & a_{i_p, j_2} & \dots & a_{i_p, j_p} \end{pmatrix}.$$

El *menor de  $A$*  asociado al par  $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$  es

$$A(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}) := \det(A[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]).$$

# Matrices totalmente positivas y totalmente no negativas

## Definición

Una matriz  $n \times m$  con entradas en los números reales se llama **totalmente positiva** o **TP** (resp. **totalmente no negativa** o **TNN**) si todos sus menores son números reales positivos (resp. números reales no negativos).

## Ejercicio 1

Calcula todos los menores de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Hay matrices totalmente positivos o totalmente no negativos entre ellos?  
¿Cuántos menores hay de cada tamaño? ¿Cuántos menores tiene una matriz  $n \times n$ ?

# Productos de matrices y el determinante

Una pregunta natural es si la positividad total es una propiedad que se preserva bajo operaciones básicas en matrices, por ejemplo la multiplicación.

Nos acordamos del siguiente resultado del álgebra lineal:

## Teorema (Cauchy–Binet)

Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $C = AB$ . Entonces,

$$\det(C) = \sum_{i \in \binom{[n]}{m}} A([m], i) B(i, [m]). \quad (0.1)$$

# Cauchy-Binet y matrices TP/TNN

Observa que podemos usar la formula (0.1) para calcular menores de matrices.

## Corolario 1

*Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  dos matrices totalmente positivas. Entonces,  $C = AB$  es totalmente positiva.*

## Ejercicio 2

*Prueba el Corolario 1 usando el Teorema 6*

# Certificados

Para aplicaciones en general es importante decidir dado una matriz, si es totalmente positiva (o totalmente no negativa) o no:

Un *certificado de positividad* (para matrices en  $\mathbb{R}^{n \times m}$ ) es un conjunto de menores cuya positividad implica la positividad de *todos* los menores.

Entonces, necesitamos herramientas que nos dejan verificarlo. Un problema es que el número de menores de una matriz crece de manera exponencial con su dimensión ([Ejercicio 1](#)).

Por lo tanto es importante que encontremos un test *eficiente* de positividad donde la cardinalidad del certificado es el mínimo.

## Ejemplo

Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Los menores son

$$a, b, c, d \quad \text{y} \quad \Delta = ad - bc.$$

Podemos expresar  $d = \frac{\Delta+bc}{a}$  y  $a = \frac{\Delta+bc}{d}$ . Entonces, los dos conjuntos

$$\{a, b, c, \Delta\} \quad \text{y} \quad \{d, b, c, \Delta\}$$

son certificados de positividad para  $A$ . Nota que los dos tienen cuatro elementos, que es justo el grado de libertad que tenemos en escoger los elementos  $a, b, c, d$ —o equivalentemente es la dimensión de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ . En particular, los dos son test de positividad eficientes.

## Tarea 1

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- 1 *Da un test de positividad para  $A$ . ¿Cuántos elementos tiene?*
- 2 *¿Cuáles son las condiciones en  $a, b, c, d, e, f$  para que  $A$  sea totalmente positiva/no negativa?*

# Matrices especiales

Existen matrices para las que resulta relativamente fácil determinar su positividad (o más bien su no-negatividad):

*matrices diagonales, triangulares superiores y inferiores.*

## Tarea 2

Si  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  es una matriz triangular superior (entonces  $a_{ij} = 0$  si  $i > j$ ). ¿Con  $n = 3$  cuáles  $i, j \in \binom{[3]}{p}$  cumplen  $A(i, j) = 0$  para toda  $A$ ?  
¿Qué para  $n$  arbitrario?

# Matrices especiales

Existen matrices para las que resulta relativamente fácil determinar su positividad (o más bien su no-negatividad):

*matrices diagonales, triangulares superiores y inferiores.*

## Tarea 2

Si  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  es una matriz triangular superior (entonces  $a_{ij} = 0$  si  $i > j$ ). ¿Con  $n = 3$  cuáles  $i, j \in \binom{[3]}{p}$  cumplen  $A(i, j) = 0$  para toda  $A$ ? ¿Qué para  $n$  arbitrario?

Observamos que para  $n$  arbitrario  $A(i, j) = 0$ , si  $i_k > j_k \forall k$ .

De manera similar, si  $A$  es triangular inferior tenemos que  $A(i, j) = 0$ , si  $i_k < j_k$  para todos los  $k$ .

## Certificados para matrices triangulares

De hecho podemos aún reducir más el número de menores que tenemos que calcular en este caso:

### Teorema (Teorema 2.8, Pinkus)

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n^2}$  una matriz triangular superior (resp. inferior). Si  $A$  satisface

$$A([k], [j+1, j+k]) > 0 \quad (\text{resp. } A([j+1, j+k], [k]) > 0)$$

para todos los  $j \in [0, n-k]$  y  $k \in [n]$ , entonces  $A$  es totalmente no-negativa.

## Descomposiciones de matrices

Combinando con el Corolario de Cauchy-Binet resulta útil tener una descomposición de matrices en matrices triangulares y diagonales—*LDU* en inglés, *IDS* en español.

Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  tal que  $A([k], [k]) > 0$  para  $k \in [n]$ .

[§2.4 p.51, Pinkus] explica como calcular matrices  $I, D, S \in \mathbb{R}^{n^2}$  (donde  $I$  es una matriz triangular inferior,  $D$  una matriz diagonal y  $S$  una matriz triangular superior) tal que

$$A = IDS.$$

Si el determinante de  $A$  es uno, es decir  $A \in SL_n(\mathbb{R})$ , entonces también  $\det(I) = \det(D) = \det(S) = 1$ .

# Lema de separación

## Lema (Cryer 1973)

Sea  $A \in SL_n(\mathbb{R})$ . Entonces  $A$  es totalmente no-negativa si y solo si  $A$  tiene una descomposición

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (0.2)$$

tal que todas las matrices en el lado derecho son totalmente no-negativas y unitarias.

# Matrices primarias

Las matrices en la descomposición (0.2) se pueden descomponer aún más, son productos de *matrices primarias*:

$$\begin{aligned}x_i(t) &:= 1 + tE_{i,i+1}, & y_i(t) &= 1 + tE_{i+1,i}, \\z_i(t) &:= 1 + (t - 1)E_{i,i} + (t^{-1} - 1)E_{i+1,i+1},\end{aligned}$$

donde  $E_{i,j}$  es la matriz con entrada 1 en la posición  $(i,j)$  y todos los demás 0, y  $1$  es la matriz de identidad (este resultado se llama el *Teorema de Loewner–Whitney*).

## Intermezzo: álgebras de Lie

Las matrices  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$  y  $z_i(t)$  son muy relacionadas a las *generadores de Chevalley* del álgebra de Lie

$$\mathfrak{sl}_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{tr}(A) = \sum_{i \in [n]} a_{i,i} = 0\}.$$

Más precisamente, los generadores de Chevalley son las siguientes matrices

$$e_i = E_{i,i+1}, \quad f_i = E_{i+1,i}, \quad h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \in \mathfrak{sl}_n.$$

## Intermezzo: álgebras de Lie

Las matrices  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$  y  $z_i(t)$  son muy relacionadas a las *generadores de Chevalley* del álgebra de Lie

$$\mathfrak{sl}_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{tr}(A) = \sum_{i \in [n]} a_{i,i} = 0\}.$$

Más precisamente, los generadores de Chevalley son las siguientes matrices

$$e_i = E_{i,i+1}, \quad f_i = E_{i+1,i}, \quad h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \in \mathfrak{sl}_n.$$

Recuerda que el *exponencial de una matriz*  $A$  es definido

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

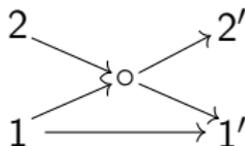
### Tarea 3

Verifica que las exponenciales de las matrices  $e_i, f_i, h_i$  satisfacen para  $t \in \mathbb{R}$

$$x_i(t) = \exp(te_i), \quad y_i(t) = \exp(tf_i) \quad \text{y} \quad z_i(t) = \exp(th_i).$$

## Redes planas

Una *red plana de orden  $n$*  es una gráfica plana orientada con  $2n$  vértices marcados  $1, \dots, n$  y  $1', \dots, n'$ , de los cuales  $i$  son fuentes y  $i'$  son pozos; con vértices interiores y aristas orientadas. Por ejemplo,



La *matriz de caminos* de una red plana de orden  $n$  es la matriz  $W = (w_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  donde

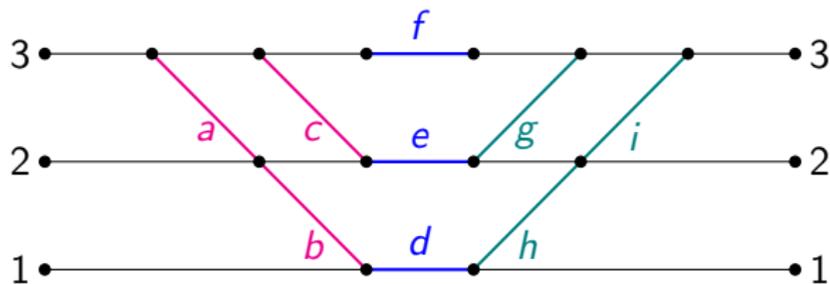
$$w_{ij} := \text{número de caminos de } i \text{ a } j'.$$

### Ejercicio 3

Calcula la matriz de caminos del ejemplo. ¿Es totalmente positiva?

## Ejemplo: red plana de orden 3

Consideramos la siguiente red plana  $\Gamma_0$



Un *camino* en  $\Gamma_0$  es de un vértice  $i$  en la izquierda a un vértice  $j$  en la derecha con la restricción que cada arista se puede atravesar solamente de la izquierda a la derecha. El *peso de un camino* es el producto de todos los pesos ( $a, \dots, i$ ) de sus aristas (los pesos de las aristas sin etiqueta son 1).

## Ejercicio: matrices de caminos y positividad

### Tarea 4

- 1 *Calcula la matriz de caminos de  $\Gamma_0$ , es decir, la matriz  $3 \times 3$  cuya entrada  $a_{ij}$  es la suma de todos los pesos de caminos de  $i$  a  $j$ .*
- 2 *Muestra que la matriz  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  es totalmente positiva si y solo si  $a, \dots, i \in \mathbb{R}_{>0}$ .*

*De hecho, cada matriz  $3 \times 3$  totalmente positiva es la matriz de caminos de la gráfica  $\Gamma_0$  para alguna elección de pesos  $a, \dots, i$ .*

# Referencias

- Pin** A. Pinkus. Totally Positive Matrices. Cambridge University Press 2010
- Kar** S. Karlin. Total Positivity Volume I. Stanford University Press 1968
- TPA** Total Positivity and Its Applications. Editors: M. Hazewinkel (managing), M. Gasca, C.A. Micchelli. Springer: Mathematics and Its Applications Volume 359, 1996
- Kod** Y. Kodama. KP Solitons and the Grassmannians. SpringerBriefs in Mathematical Physics Volume 22, 2017