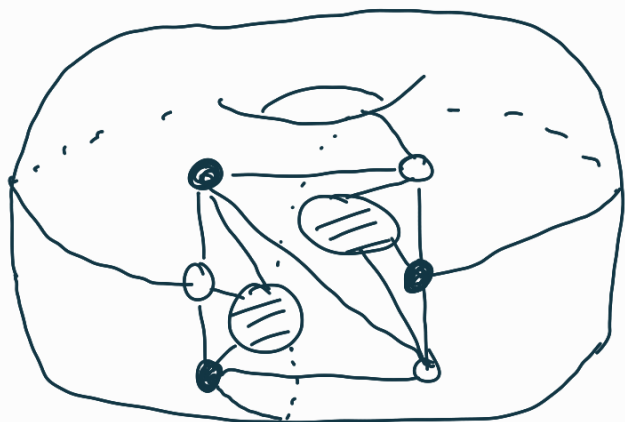
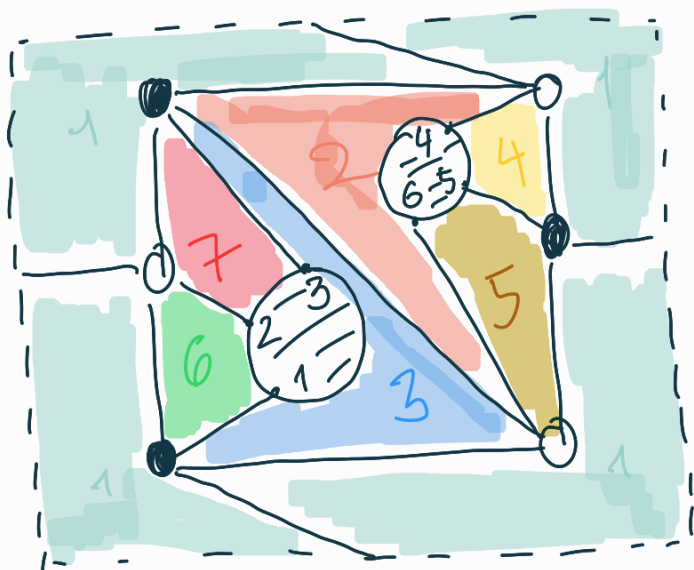


## Observaciones:

- gráficas planas definen una estructura de conglomerado a través de sus variables de caras  
     $\leadsto$   $X$ -variable de conglomerado
- la definición de cara (y plana) depende de la geometría del encaje de la gráfica (en el caso clásico en un disco)
- También la noción de los viajes (girar a la derecha/izquierda) depende de la geometría (por lo tanto las permutaciones)
- Gráficas planas parametrizan las células de  $\text{Grun}^{\text{tm}}(\mathbb{R})$ , pero  $\text{Grun}(\mathbb{C})$  contiene muchos más puntos que no podemos ver en las células  $S_n^{\text{tm}}$ .  
     $\leadsto$  para entender la estructura de  $\text{Grun}(\mathbb{C})$  tenemos que generalizar las gráficas

Ejemplo: una gráfica plana en un toro con 2 comp. frontera:



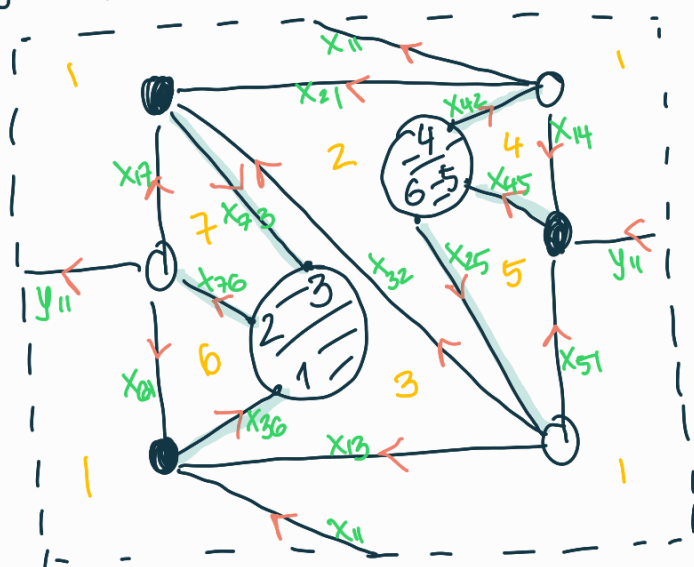
Ejercicio:  $G$  no tiene encaje en una superficie de Riemann con género  $g=0$ .

Muchos resultados siguen válidos

(1) emparejamientos  $\xleftrightarrow{\text{bij}}$  orient. perfectas

(2)  $\text{Mod } G: \mathbb{R}_{>0}^{F-1} \rightarrow G_{\text{un}}$  (ya no es un!)

**Ejemplo** una orientación perfecta con puentes  $I = \{2, 4, 6\}$



$$M_{21} = x_{76} x_{61} x_{36}$$

$$M_{23} = x_{76} x_{17} x_{73}$$

$$M_{25} = x_{76} y_{11} x_{45}$$

$$M_{41} = x_{42} x_{11} x_{36}$$

$$M_{43} = x_{42} x_{21} x_{73}$$

$$M_{45} = x_{42} x_{14} x_{45}$$

$$M_{61} = x_{25} x_{13} x_{36}$$

$$M_{63} = x_{25} x_{32} x_{73}$$

$$M_{65} = x_{25} x_{51} x_{45}$$

$$A(N) = (a_{ij}) \quad a_{ij} = (-1)^{\#\{i \in I: i < i_{ij}\}} M_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & x_{76} x_{61} x_{36} & 1 & x_{76} x_{17} x_{73} & 0 & -x_{76} y_{11} x_{45} & 0 \\ 4 & x_{42} x_{11} x_{36} & 0 & x_{42} x_{21} x_{73} & 1 & x_{42} x_{14} x_{45} & 0 \\ 6 & x_{25} x_{13} x_{36} & 0 & x_{25} x_{32} x_{73} & 0 & x_{25} x_{51} x_{45} & 1 \end{pmatrix} = A(N) \notin G_{133}^{\text{un}}$$

$$\text{e.g. } \Delta_{123} = -M_{41} M_{63} + M_{43} M_{61} \notin \mathbb{R}_{>0}[x_{ij}]$$

$$\Delta_{124} = M_{63}$$

$$\Delta_{125} = -M_{41}$$

# Variables de caras & Co.

Dado un embejamiento  $G \hookrightarrow (S, \partial)$  t.q.  $G$  es grafica planica en  $S$  podemos introducir variables de las caras como antes:

- fijamos una orientaci3n (perfecta) en  $G$



- supongamos que  $G$  no tiene comp. aislados y definimos (como antes)

Nota:  $\prod_{f \in G} y_f = 1$   
cara

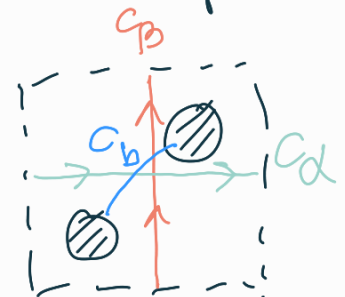
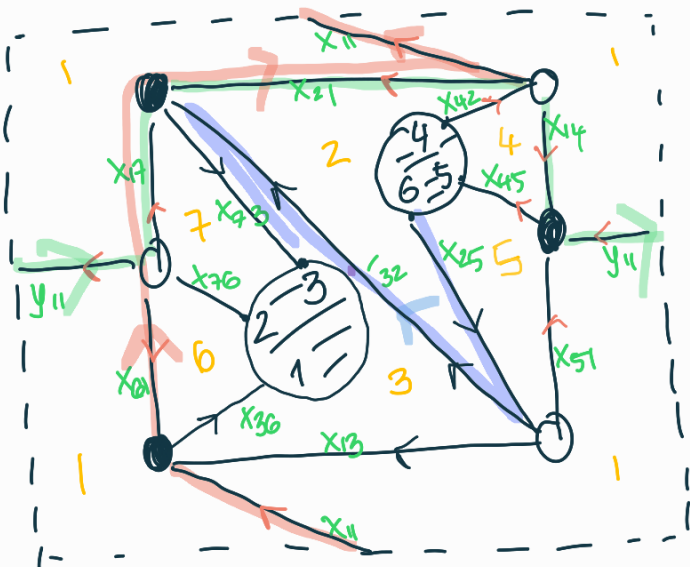
$$y_f = \prod_{e \in \partial f} x_e \quad \prod_{e \in \partial f} x_e^{-1}$$

orientado con reloj      contra reloj

Ademas necesitaremos variables asociados a ciclos fundamentales de  $S$  y cortes entre las componentes de la frontera:

- para cada ciclo fundamental  $C_\alpha \in S$  escogemos un camino<sup>a</sup> en  $G$  homomorfo a  $C_\alpha$
- Si tenemos  $B > 1$  componentes en la frontera de  $S$  (que intersectan  $G$ ) escogemos  $B-1$  caminos en  $G$  entre los componentes de la frontera.

Ejemplo:



asociamos caminos  $\alpha, \beta, b$  en  $(G, \partial)$  y

Sus variables corresponden a los caminos con resp. la orientaci3n

$$\beta = x_{11} x_{61}^{-1} x_{17} x_{21}^{-1}$$

$$\alpha = y_{11}^{-1} x_{17} x_{21}^{-1} x_{14}$$

$$b = x_{25} x_{32} x_{73}$$

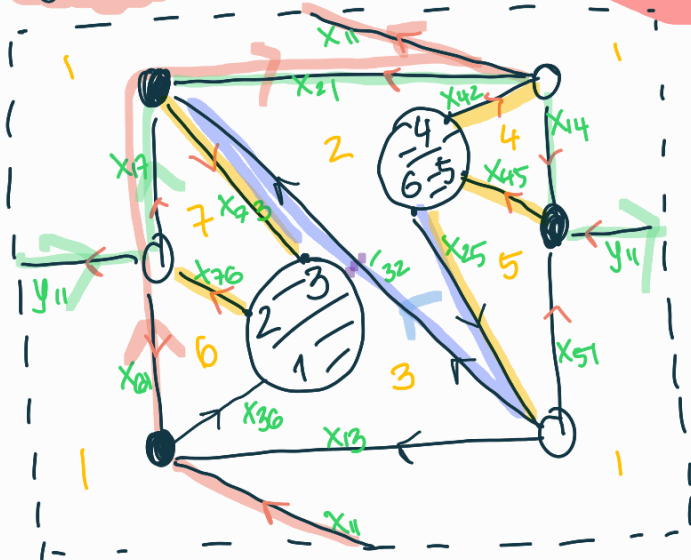
**Ventaja:** Las variables  $\{y_\epsilon : \epsilon \text{ cara de } G\} / \prod y_\epsilon = 1$   
 $\cup \{a_i : \{C_{a_i}\} \text{ base de ciclos fund. } S\}$   
 $\cup \{b_i : \{C_{b_i}\} \text{ corte de } \partial\}$

1502.02034 son linealmente independientes.

$\Rightarrow$  Son coordenadas (i.e. una parametrización) de la celda  $\text{Med}_{(G,S)}(\mathbb{R}^{*n}) = \text{Su} \subset \text{Grun}(G)$

donde  $d = \dim \text{Su}$  y  $\mathbb{R} = \mathbb{R}_G$  maxíide (ya no es positíide!)

**Ejemplo:**



$$y_1 = \frac{x_{21} x_{61} x_{51}}{x_{13} x_{14} x_{17}}$$

$$\beta = \frac{x_{11} x_{17}}{x_{61} x_{21}}$$

$$y_6 = \frac{1}{x_{76} x_{61} x_{96}}$$

$$\alpha = \frac{x_{17} x_{14}}{y_{11} x_{21}}$$

$$b = x_{32} x_{73} x_{25}$$

$$y_3 = \frac{x_{13} x_{36}}{x_{73} x_{32}}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{21} = y_6^{-1}$$

$$M_{23} = y_7$$

$$M_{25} = \alpha^{-1} b^{-1} y_7 y_2 y_4$$

$$M_{41} = \beta \cdot y_6^{-1} y_7^{-1} b y_2^{-1}$$

$$M_{43} = y_2^{-1} b$$

$$M_{45} = y_4$$

$$M_{61} = b y_3$$

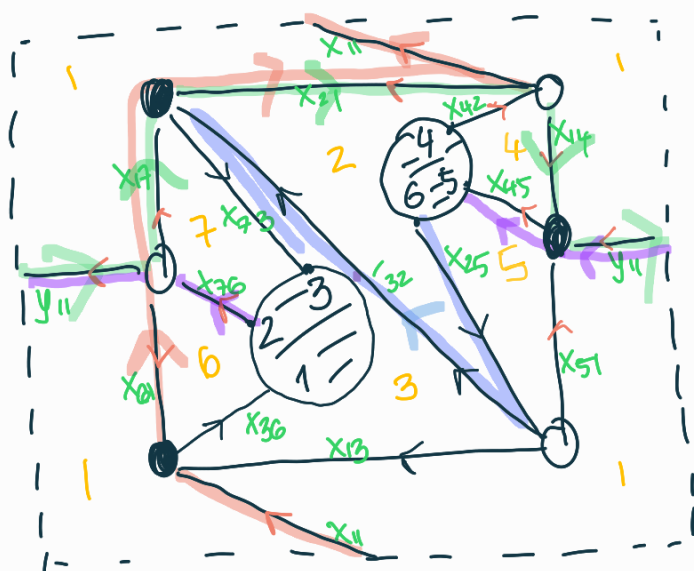
$$M_{63} = b$$

$$M_{65} = y_5^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ y_6^{-1} & 1 & y_7 & 0 & -(\alpha b)^{-1} y_2 y_4 y_7 & 0 \\ \beta b (y_6 y_7 y_2)^{-1} & 0 & y_2^{-1} b & 1 & y_4 & 0 \\ b y_3 & 0 & b & 0 & y_5^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{123} = -b^2 \beta (y_6 y_7 y_2)^{-1} + b^2 y_2^{-1} y_3 = b^2 y_2^{-1} (y_3 - y_6 y_7)$$

**Ejemplo:** Consideramos  $M_{25}$ , existe un camino  $b_2 \rightarrow b_5$  su peso en las aristas es  $wt(P) = x_{76} y_{11}^{-1} x_{45}$



Observamos que  $P, a$  y  $b$  (junto con componentes en la frontera) cortan la superficie en dos:

una parte con  $P, a, b$  en su frontera orientado con el reloj, y la otra contra:

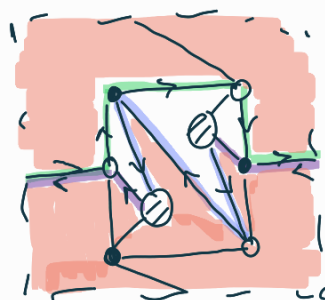
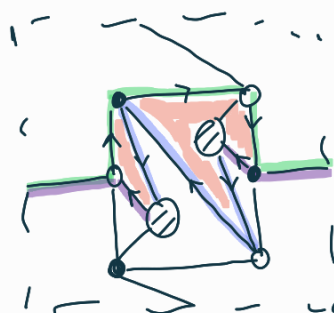
El peso del camino en las variables de caras  $\& co.$  es

$$wt(P) = a^{-1} b^{-1} y_2 y_4 y_7$$

caras con  $a, b, P$  en su frontera orientada con el reloj

$$= a^{-1} b^{-1} y_1^{-1} y_3^{-1} y_5^{-1} y_6^{-1}$$

caras con  $a, b, P$  en su frontera orientadas contra el reloj.



**Ejercicio:** Verifica  $M_{41}$  en las variables de caras  $\& co.$

**Pregunta 1:** ¿Qué tanto depende del encaje?

e.g. cambiando el encaje  $G \hookrightarrow (S, \sigma)$

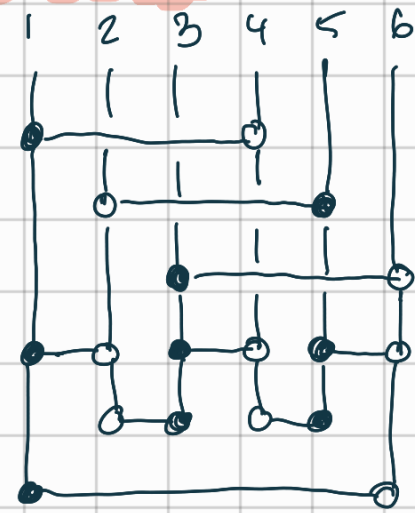
¿cambia el matroide? Existe una transf.

**Conjetura:** ¡NO!

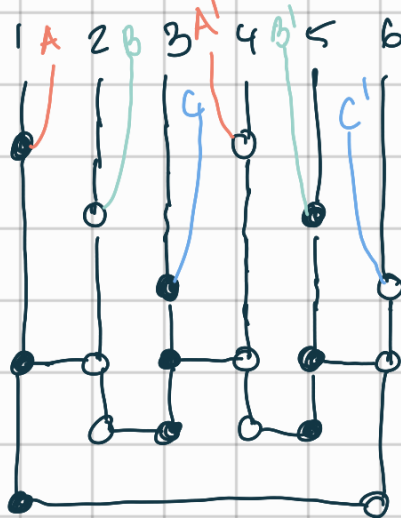
$Med(cas(N)) \rightarrow Med(G_5(N))$   
def. topológicamente?

**Ejemplo:** La gráfica anterior coincide con la siguiente:

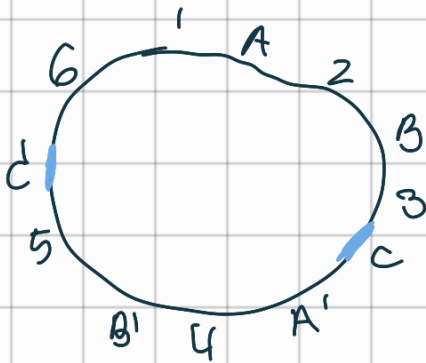
3 receta para encontrar un encaje:  
"abriendo puentes"



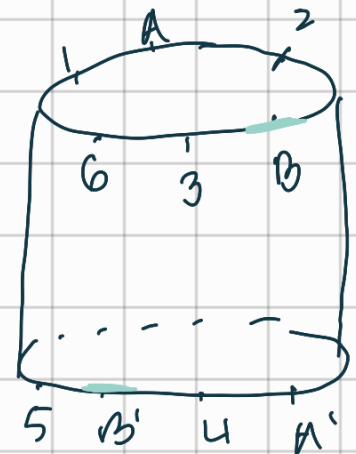
$L_{20}$  1607.01781  
arxiv



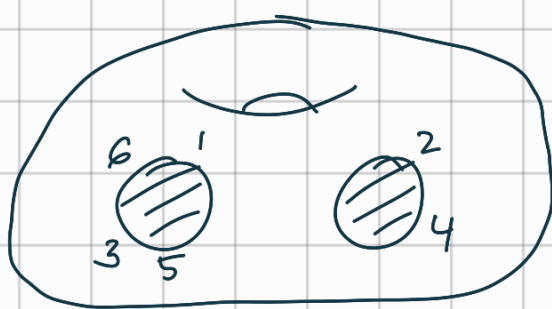
ahora se puede  
encajar en un  
disco



ahora  
pegamos  
C y C'



pegamos  
B y B'



pegamos  
A y A'



**Ejercicio:** Dibuja la gráfica en la superficie obtenida  
y calcula su matriz de medida de frontera  
¿Define el mismo punto en  $Gr_{36}$ ?  
¿Determina el mismo morfismo?

Pregunta 2: En 1607-01781 clasifican gráficas bicoloradas  $G$  que tienen encajes planos  $G \hookrightarrow (S, \sigma)$  a distintos superficies de Riemann con borde  $(S, \sigma)$  que clasifican células <sup>de dim 9</sup>. En  $Gr_{3,6}$  con importancia en la teoría de Super Yang-Yuils. Dan una lista de 24 gráficas, una de ellas es plana y representar  $Gr_{3,6}^{TP}$ .

- ① Determina un encaje para cada gráfica
- ② Determina la estructura de conglomerado de cada célula.
- ③ Matemáticamente, ¿qué clasifican las 24 gráficas?