Ejercicios 3 del curso "Álgebras de Conglomerado"

Lara Bossinger

semestre 2022-1

4. La clasificación de tipo finito

4.5. Tipo C

Lema 4.34. Sea Q un carcaj con una acción de un grupo finito G tal que Q es globalmente plegable. Sea Q' un carcaj que se obtiene de Q agregando vértices congelados y flechas entre los vértices nuevos y los vértices mutables de Q. Extendimos la acción de G a Q' tal que cada vértice nuevo es fijo bajo la acción.

Entonces, también Q' es globalmente plegable con respecto a la acción de G.

Corolario 4.35. Sea Q un carcaj sin vértices congelados y globalmente plegable con respecto a la acción de un grupo finito G. Supongamos que cada patrón de semillas con matriz de intercambio inicial $B(Q)$ (independientemente de las direcciones congeladas) es de tipo finito.

Entonces cada patrón de semillas con matriz de intercambio inicial $B(Q)^G$ es de tipo finito.

Ejercicio 4.8. Pruebe el Lema 4.34 y el Corolario 4.35.

Solución:

Lema 4.34 Primero verificamos que Q' es G-admisible afirmando los cuatro puntos de la Definición 4.7.

1. P.D. si $i \sim i'$ entonces i es mutable si y solo si i' lo es: como solo agregamos vértices congelados a Q, se cumple.
2. P.D. $b_{ij} = b_{g(i)g(j)}$ para todos $g \in G$: los vértices nuevos k cumplen $g(k) = k$.
3. P.D. $i \sim i'$ implica $b_{ii'} = 0$: como $b_{kk} = 0$ y $g(k) = k$ se cumple para los nueves vértices k.
4. P.D. $i \sim i'$ implica $b_{ij}b_{i'j} \geq 0$: tenemos $b_{kj}b_{kj} = b_{kj}^2 \geq 0$.

Para verificar que Q' es globalmente plegable tenemos que afirmar que para cada secuencia $J_1, \ldots, J_s$ que $\mu_{J_1} \circ \cdots \circ \mu_{J_s}(Q)$ es G-admisible. Procedemos por inducción: para $s = 1$ nota que cada G-orbita mutable en Q' es una G-orbita mutable en Q pues solo agregamos vértices congeladon. Entonces $\mu_J(Q')$ se obtiene de $\mu_J(Q)$ agregando vértices congelados y flechas entre los vértices nuevos y los vértices viejos. En particular, por lo anterior, $\mu_J(Q')$ es G-admisible.

Corolario 4.35 es consecuencia del Lema 4.34 con el Corolario 4.14.

En el carcaj $Q(T_0)$ etiquetamos los vértices que corresponden a arcos $\overline{i, n+1}$ como i y a los vértices en la misma orbita bajo la simetría central como i', como en la Figura **??**. El carcaj $Q(T_0)$ es una orientación del diagrama de Dynkin de tipo $\mathtt{A}_{2n+2}$ con vértices (en orden) $n', \dots, 3', 2', 1, 2, 3, \dots, n$ y flechas orientadas al vértice central 1.

Sea $G = \mathbb{Z}_2$ actuando en $Q(T_0)$ de tal manera que intercambia los vértices i y i' para $i \in [2, n]$ y que fija 1.

Ejercicio 4.9. Verifica que $Q(T_0)$ es G-admisible y que la matriz de intercambio plegada $B(Q(T_0))^G$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Solución: Verificamos que $Q(T_0)$ es G-admisible:

1. todos los vértices son mutables;
2. se satisface por la simetría central de $Q(T_0)$;
3. las G-orbitas son totalmente desconexas;
4. no existen caminos orientados de longitud dos que conectan dos vértices en la misma G-orbita.

Sean $I = \{i, i'\}$ y $J = \{j, j'\}$ una G-orbita con $2 \leq i < j \leq n$ entonces,

$$b^G_{IJ} = b_{i,j} + b_{i'j} = \begin{cases} -1 & j = i+1 \\ 0 & j \neq i+1 \end{cases}$$

Para la G-orbita $\{1\}$ obtenemos

$$b^G_{\{1\},I} = b_{1i} = \begin{cases} -1 & i = 2 \\ 0 & i \neq 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad b^G_{I,\{1\}} = b_{i1} + b_{i'1} = \begin{cases} 2 & i = 2 \\ 0 & i \neq 2 \end{cases}$$

4.6. Enumeración y tipo 2-finito

Ejercicio 4.10. Prueba que los patrones de semillas de tipo $\mathtt{C}_n$ tienen $\binom{2n}{n}$ semillas y $n(n+1)$ variables de conglomerado usando el modelo geométrico de la sección §4.5.

Ejercicio 4.11. Sean B y B' dos matrices de intercambio tal que sus compañeras de Cartan $A(B)$ y $A(B')$ corresponden al mismo diagrama de Dynkin no simplemente lazado. Entonces, B y B' son equivalentes bajo mutación.

Solución: B y B' se obtienen plegando dos carcajes Q y Q' globalmente plegables con respecto a la acción de un grupo finito G que son orientaciones (eventualmente distintas) del mismo diagrama de Dynkin simplemente lazado, digamos $\mathtt{Y}_m$. Sea $(k_1, \ldots, k_s)$ la secuencia de mutaciones que según el Corolario 2.17 transforma la orientación Q de $\mathtt{Y}_m$ a la orientación Q'. Como Q' es G-admisible la secuencia $(k_1, \ldots, k_s)$ corresponde a una secuencia de mutaciones en G-orbitas mutables $(K_1, \ldots, K_r)$ y el Lema 4.10 aplica.

Ejercicio 4.12. En este ejercicio tratamos el caso de un álgebra de conglomerado de tipo descomponible. Para un diagrama de Dynkin $\mathtt{X}_n$ sea $s(\mathtt{X}_n)$ el número de semillas de un álgebra de conglomerado de tipo $\mathtt{X}_n$ y sea $vc(\mathtt{X}_n)$ el número de las variables de conglomerado.

Pruebe las siguientes afirmaciones.

1. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de conglomerado de tipo $\mathtt{X}_n \sqcup \mathtt{Y}_{n'}$, entonces el número de las variables de conglomerado de $\mathcal{A}$ es $vc(\mathtt{X}_n) + vc(\mathtt{Y}_{n'})$ y el número de semillas de $\mathcal{A}$ es $s(\mathtt{X}_n) \cdot s(\mathtt{Y}_{n'})$.

2. Si la compañera de Cartan de una matriz de intercambio es de tipo finito (posiblemente descomponible) entonces el patrón de semillas es de tipo finito. *Tipp: Puedes usar el hecho que cada patrón de semillas de tipo* $\mathtt{X}_n$ *es de tipo finito donde* $\mathtt{X}_n$ *es un diagrama de Dynkin conexo.*

3. Si B y B' son matrices de intercambio y $A(B)$ y $A(B')$ son sus compañeras de Cartan de tipo finito (posiblemente descomponibles), entonces $A(B)$ y $A(B')$ son del mismo tipo si y solo si B y B' son equivalentes bajo mutación.

Solución:

1. Si $\mathcal{A}$ es de tipo $\mathtt{X}_n \sqcup \mathtt{Y}_m$ entonces (bajo permutación) existe una matriz de intercambio en el patrón de semillas de $\mathcal{A}$ que tiene forma block diagonal tal que las compañeras de Cartan de los bloques son de tipo $\mathtt{X}_n$ y $\mathtt{Y}_{n'}$. En particular, las semillas en el patrón de semillas tienen la forma $(\mathbf{x} \cup \mathbf{x}', \left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{smallmatrix}\right))$ donde $(\mathbf{x}, B)$ es una semilla de tipo $\mathtt{X}_n$ y $(\mathbf{x}', B')$ es una semilla de tipo $\mathtt{Y}_{n'}$. En particular, para cada semilla de tipo $\mathtt{X}_n$ tenemos $s(\mathtt{Y}_{n'})$ semillas de tipo $\mathtt{X}_n \sqcup \mathtt{Y}_m$ y el número de variables de conglomerado de tipo $\mathtt{X}_n \sqcup \mathtt{Y}_m$ es $vc(\mathtt{X}_n) + vc(\mathtt{Y}_{n'})$.

2. Es una consecuencia de 1.

3. Ya sabemos este resultado para el caso que $A(B)$ y $A(B')$ corresponden a diagramas de Dynkin conexos (Prueba del Teorema 4.26).

   $\Rightarrow$ Si $A(B)$ y $A(B')$ corresponden a la misma unión disjunta de diagramas de Dynkin de tipo finito, entonces bajo permutación B y B' son matrices diagonales por bloques cuyos bloques son matrices de intercambio con la misma compañera de Cartan. Así el argumente se reduce al caso que $A(B)$ y $A(B')$ corresponden al mismo diagrama de Dynkin conexo.

   $\Leftarrow$ Sean B y B' son equivalentes bajo mutación y sean $A(B), A(B')$ sus compañeras de Cartan. Si $A(B)$ y $A(B')$ corresponden a diagramas de Dynkin no conexos entonces B y B' son matrices diagonales por bloques. Como son equivalentes bajo mutación hay una correspondencia entre los bloques de B y los bloques de B'. Cada bloque corresponde a una conponente conexa del diagrama de Dynkin, pues la afirmación es una consecuencia de la Prueba del Teorema 4.26

Ejercicio 4.13. El diagrama $\Gamma' := \Gamma(\mu_k(B))$ se determina de manera única del diagrama $\Gamma(B)$ y la dirección mutable k. Más precisamente Γ' se obtiene de Γ en los siguientes pasos:

1. la orientación de las flechas adyacentes a k se invierta y se quedan con los mismos pesos;
2. para cada camino $i \xrightarrow{a} k \xrightarrow{b} j$ distinguimos dos casos (ambos incluyen el caso que no existen flechas entre i y j):
   - si existe una flecha $i \xrightarrow{c} j$: en este caso en Γ' tenemos

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dl, "a"'] & \\ i \arrow[rr, "c'"'] & & j \arrow[ul, "b"'] \end{tikzcd} \qquad \text{donde } c' = (\sqrt{ab} + \sqrt{c})^2;$$

   - si existe una flecha $i \xleftarrow{c} j$: en este caso en Γ' tenemos

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dl, "a"'] & \\ i & & j \arrow[ul, "b"'] \arrow[ll, "c'"] \end{tikzcd} \qquad \text{donde } c' = (\sqrt{ab} - \sqrt{c})^2;$$

3. todos los demás flechas se quedan iguales.

Tipp: considera la matriz casi-simetrica $S(B) = (s_{ij})$ asociada con B con entradas $s_{ij} :=$ $\operatorname{sgn}(b_{ij})\sqrt{b_{ij}b_{ji}}$ y prueba que $\mu_k(S(B)) = S(\mu_k(B))$.

Solución: Proposition 8.1 en Fomin–Zelesinky *Cluster algebras II: Finite type classification* [?]

4.6.1. Los Árboles

Ejercicio 4.14. Si B es una matriz 2-finita entonces para todas las i, j, k distintas tenemos

$$b_{ij}b_{jk}b_{ki} = -b_{ji}b_{kj}b_{ik}.$$

Además los pesos de triángulos en $\Gamma(B)$ son $\{1, 1, 1\}$ o $\{2, 2, 1\}$. *Tipp: Sin perder de generalidad puedes suponer que B es una matriz 3×3.*

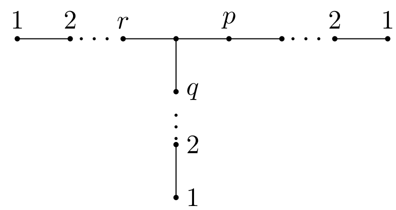
Solución: Lemma 7.6 en Fomin–Zelesinky's *Cluster algebras II: Finite type classification* [?]

4.6.2. Los Ciclos

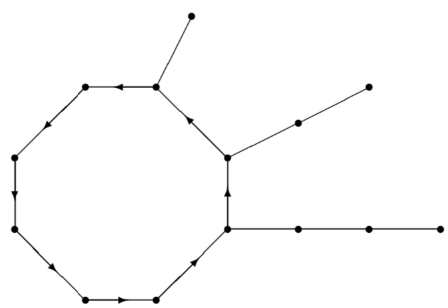
Ejercicio 4.15. Muestra que en el último caso de la prueba de la Proposición 4.45 tenemos $\Gamma \sim \mathtt{F}_4$.

4.6.3. Ejercicios

Ejercicio 4.16. Sean $p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $T_{p,q,r}$ la gráfica con $p+q+r+1$ vértices que se forma de trés cadenas del gráficas de tipo $\mathtt{A}_{r+1}, \mathtt{A}_{p+1}$ y $\mathtt{A}_{q+1}$ plegadas en un vértice:



Sean $p, q, r \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Definimos el diagrama $S^s_{r,p,q}$ con $p+q+r+s$ vértices que consiste de un $s+3$-cíclo orientado y tres gráficas de tipo $\mathtt{A}_{r-1}, \mathtt{A}_{p-1}$ y $\mathtt{A}_{q-1}$ plegadas a tres vértices consecutivos del ciclo. Por ejemplo, $S^5_{4,3,2}$ es



Todos los pesos en las flechas son uno y las orientaciones de las aristas en los subdiagramas de tipo $\mathtt{A}$ son arbitrarias.

Muestra que el diagrama $S^s_{r,p,q}$ es equivalente bajo mutación a un diagrama de tipo $T_{p+r-1,q,s}$.

Solución: Lemma 9.6 en Fomin–Zelesinky's: *Cluster algebras II: Finite type classification* [?]

5. Coeficientes

5.1. Semicampos

Ejercicio 5.1. La adición auxiliar del semicampo tropical como definida en (5.1) es conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la multiplicación usual, es decir: $(p \oplus q)r = pr \oplus qr$. En particular, $\mathrm{Trop}(y_1, \ldots, y_n)$ es un semicampo.

Ejercicio 5.2. Muestra que $\mathbb{ZP}$ es un dominio integral para cualquier $\mathbb{P}$.

Solución: Primero verificamos que $\mathbb{P}$ es libre de torsión: sea $p \in \mathbb{P}$ con $p^m = 1$ para algún m. Calculamos

$$p = \frac{p^{m-1} \oplus p^{m-2} \oplus \cdots \oplus 1}{p^{m-1} \oplus p^{m-2} \oplus \cdots \oplus 1} p = \frac{p^m \oplus p^{m-1} \oplus \cdots \oplus p}{p^{m-1} \oplus p^{m-2} \oplus \cdots \oplus 1} = 1.$$

Aun $\mathbb{P}$ no necesaria mente es finitamente generado (e.g el semicampo universal) cada subgrupo finitamente generado es una latiz (abeliano y libre de torsión). Sean $p, p' \in \mathbb{ZP}$ tal que $pp' = 0$. Entonces, p y p' son sumas finitas de elementos en $\mathbb{P}$. Sea G el subgrupo generado de todos los sumandos de p y p', pues G es finitamente generado y una latiz. Tenemos $pp' \in \mathbb{Z}G$ que es un anillo de polinomios de Laurent, pues libre de divisores de cero.

Ejercicio 5.3. Prueba el Lema 5.5. En particular, muestra que cada identidad en el semicampo universal es valida en cualquier otro semicampo.

Solución: Lemma 2.1.6 en Berenstein–Fomin–Zelevinsky's *Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices* [?].

5.2. Y-patrones y álgebras de conglomerado con coeficientes

Ejercicio 5.4. Muestra que la mutación de Y-semillas es una involución.

Ejercicio 5.5. La condición normalizando junto con la mutación de Y-semillas determina de manera única las tuplas $\mathbf{p}(t) = (p^+_{1;t}, p^-_{1;t}, \ldots, p^+_{n;t}, p^-_{n;t})$ con $p^+_{k;t} := \frac{y_{k;t}}{y_{k;t} \oplus 1}$ y $p^-_{k;t} := \frac{1}{y_{k;t} \oplus 1}$.

5.2.1. Ejercicios

Ejercicio 5.6. Prueba la Proposición 5.19, es decir prueba que para cada generador p_j de $\mathbb{P}$ y cada variable de conglomerado z que z es un polinomio en p_j. *Tipp: usa inducción sobre la distancia entre una semilla que contiene la variable z y la semilla inicial como en la prueba del Teorema 3.1.*

Ejercicio 5.7. Sean $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1$ cuatro puntos en la linea proyectiva. Entonces, $P_i = [a_i : b_i]$ en coordinadas proyectivas. Definimos

$$Y(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{P_{14} P_{23}}{P_{12} P_{34}}$$

donde $P_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$. Nota que Y está relacionada a la razón cruzada convencional bajo $Y(P_1, P_2, P_3, P_4) = -(P_1, P_3; P_4, P_2)$. La razón cruzada es una invariante de cuatro puntos colineales y se puede generalizar para n-tuplas de puntos $P_1, \ldots, P_n$ en $\mathbb{P}^1$.

1. Dado seis puntos $P_1, \ldots, P_6 \in \mathbb{P}^1$ calcula las razones cruzadas $Y(P_1, P_i, P_{i+1}, P_{i+2})$ con $i \in \{2, 3, 4\}$ en términos de las rozones cruzadas $Y(P_j, P_{j+1}, P_{j+2}, P_6)$ con $j \in \{1, 2, 3\}$.
2. Dado una triangulación del n-ágono T sea B_T la matriz de intercambio (no extendida) del carcaj Q_T (Definción 2.7). Cada arco $d \in T$ es la diagonal de un cuadrilatero con vértices i, j, k, l. Definimos $Y_d := Y(P_i, P_j, P_k, P_l)$. Sea $Y_T := (Y_d : d \in T)$.

   Muestra que (Y_T, B_T) es un Y-patrón.
3. Concluye que para saber los $\binom{n}{4}$ razones cruzadas de $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}^1$ es suficiente calcular $n - 3$ de ellas.

Solución: Example 3.5.8 en Fomin–Williams–Zelevisnky's *Introduction to cluster algebras*, chapters 1 - 3. [?]

1. Recuerda el carcaj y la semilla asociada a una triangulación del hexágono. Sea T la triangulación con arcos $\overline{15}, \overline{14}, \overline{13}$. Como el álgebra de conglomerado coincide con el álgebra de Plücker $A_{2,6}$ tenemos las variables de conglomerado p_{13}, p_{14}, p_{15} y las variables congeladas $p_{12}, p_{16}, p_{23}, p_{24}, p_{25}$. Identificamos los puntos $P_1, \ldots, P_6$ con los vértices del hexágono. Así obtenemos

$$Y(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{P_{14}P_{23}}{P_{12}P_{34}} = \frac{p_{14}p_{23}}{p_{12}p_{34}} = \hat{y}_{13},$$

donde $\hat{y}_{\overline{13}} = \prod_{\overline{ij} \in T} p_{ij}^{b_{\overline{ij},\overline{13}}}$ y $B = (b_{\overline{ij},\overline{kl}})_{\overline{ij},\overline{kl} \in T}$ es la matriz del carcaj Q_T. De manera similar verificamos

$$Y(P_1, P_3, P_4, P_5) = \hat{y}_{45}, \quad Y(P_1, P_4, P_5, P_6) = \hat{y}_{15}.$$

Para el segundo conjunto de razones cruzadas consideramos la triangulación T' del hexágono con arcos $\overline{26}, \overline{36}, \overline{46}$. Sea $\hat{y}'_{\overline{kl}} = \prod_{\overline{ij} \in T} p_{ij}^{b'_{\overline{ij},\overline{kl}}}$ con $B' = (b'_{\overline{ij},\overline{kl}})_{\overline{ij},\overline{kl} \in T}$ es la matriz del carcaj $Q_{T'}$. Calculamos

$$Y(P_1, P_2, P_3, P_6) = \hat{y}'_{26}, \quad Y(P_2, P_3, P_4, P_6) = \hat{y}'_{36}, \quad Y(P_3, P_4, P_5, P_6) = \hat{y}'_{46}.$$

Desde el Corolario 5.10.2 sabemos que los $\{\hat{y}_{ij} : \overline{ij} \in T\}$ forman un Y-patrón. En particular, los $\hat{y}'_{kl}$ con $\overline{kl} \in T'$ tienen expresiones en términos de los $\{\hat{y}_{ij} : \overline{ij} \in T\}$ que se pueden calcular, por ejemplo usando el Lema 5.28.

5.3. Formulas de separación

Ejercicio 5.8. Prueba la Proposición 5.24 usando la Proposición 5.19.

5.3.1. Ejercicios

Ejercicio 5.9. Sea $t \in \mathbb{T}_n$ y $j \in [n]$.

1. Prueba que

$$Y_{j;t} = Y_{j;t}|_{\mathrm{Trop}(y_1,\ldots,y_n)} \prod_{i=1}^{n} F_{i;t}^{b_{ij}^t} \tag{2}$$

   donde $B(t) = (b_{ij}^t)_{i,j \in [n]}$ es la matriz de intercambio en t.

2. Prueba que si $b_{ij}^t \geq 0$ para todas las $i \in [n]$, entonces $Y_{j;t}$ es un polinomio de Laurent en los coeficientes iniciales $y_1, \ldots, y_n$.

Solución:

1. Proposición 3.13 en Fomin–Zelevinsky's: *Cluster algebras IV: Coefficients.* [?]
2. Proposición 3.15 en Fomin–Zelevinsky's: *Cluster algebras IV: Coefficients.* [?]