VARIEDADES DE CONGLOMERADO

M. Gross, P. Hacking & S. Keel.
"Birational Geometry of Cluster Algebras"
Algeb. Geom. 2(2): 137-175
↳ Sección 2

Juan Bosco Frías Medina
Seminario de Variedades de Conglomerado
Miércoles 16 de febrero de 2022

Objetivo: construir 2 tipos de variedades de conglomerado: variedad $\mathcal{X}$ y $\mathcal{A}$.

Def. Los <u>datos fijos</u> Γ consiste de lo siguiente:

- Una latiz N con una forma bilinear antisimétrica,

$$\{\cdot,\cdot\}: N \times N \to \mathbb{Q}$$

- Una sublatiz saturada $N_{uf} \subseteq N$ la <u>latiz sin congelados</u> (vamos a tomar elementos para mutar). Si $N = N_{uf}$, decimos que <u>no hay variables congelados</u>.

- Conjuntos de índices I e I_{uf} de modo que

$$|I| = \operatorname{rank} N \quad y \quad |I_{uf}| = \operatorname{rank} N_{uf}.$$

- Números enteros positivos d_i, $i \in I$ con máx. común divisor $= 1$.
- Una sublatiz de índice finito $N^0 \subseteq N$ de modo que

$$\{N_{uf}, N\} \subseteq \mathbb{Z} \quad y \quad \{N, N_{uf} \cap N^0\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

- $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ y $M^0 = \mathrm{Hom}(N^0, \mathbb{Z})$.

Def. Dado un conjunto de datos fijos Γ, los <u>datos de una semilla</u> (o simplemente, <u>una semilla</u>) es una colección de elementos de N

$$\mathbf{s} = (e_i \mid i \in I)$$

de modo que:
- $\{e_i \mid i \in I\}$ es una base de N
- $\{e_i \mid i \in I_{uf}\}$ es una base de N_{uf}
- $\{d_i e_i \mid i \in I\}$ es una base de N^0.

Dada una semilla s, podemos construir otra forma bilineal (no antisimétrica):

$$[\cdot,\cdot]_s : N \times N \to \mathbb{Q}$$

$$(e_i, e_j) \mapsto [e_i, e_j]_s := \varepsilon_{ij} = \{e_i, e_j\} d_j$$

Nota: esto depende de la semilla considerada.

Comentario: los datos fijos no dependen de la semilla.

Sup. que especificamos inicialmente:

- Una base $\{e_i \mid i \in I\}$ para una latiz N,
- $I_{uf} \subseteq I$
- Fijamos los d_i's con max. común divisor $= 1$
- Matriz $(\varepsilon_{ij})_{i,j}$ de modo que $d_i \varepsilon_{ij} = -d_j \varepsilon_{ji}$,

$\varepsilon_{ij} \in \mathbb{Z}$ siempre no ~~sucede~~ $i, j \in I \setminus I_{uf}$.

Con este información, podemos recuperar $N, N_{uf}, N^{o}, \{\cdot,\cdot\}$, etc.

<u>Hecho</u>: cuando tenemos $i, j \in I \setminus I_{uf}$, la construcción de esquemas no se va a ver afecta. Por este hecho, uno considera la matriz $(\varepsilon_{ij})_{i \in I_{uf}, j \in I}$.

Si tenemos una semilla $\mathbf{s}$, podemos pensar en tomar dualidad:

$\{e_i \mid i \in I\}$ base para $N \longleftrightarrow \{e_i^* \mid i \in I\}$ base para M

$\{d_i e_i \mid i \in I\}$ base para $N^{o} \longleftrightarrow \{f_i \mid i \in I\}$ base para M^{o}

$$f_i = d_i^{-1} e_i^*$$

Tenemos un apareamiento canónico

$$\langle \cdot , \rangle : N \times M^{o} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

dado por la evaluación.

Para $i \in I_{uf}$, denotamos $v_i = \{ e_i , \cdot \} \in M^{o}$.

Usando la forma $\{ \cdot , \cdot \}$, vamos a construir aplicaciones:

$$p_i^{*} : N_{uf} \longrightarrow M^{o}$$

$$n \longmapsto p_i^{*}(n) : N^{o} \to \mathbb{Z}$$

$$n' \mapsto \{ n, n' \}$$

$$p_2^*: N \to \frac{M^0}{N_{vf}^{\perp}} \qquad \text{donde} \quad N_{vf}^{\perp} = \{ m \in M^0 \mid \langle n, m \rangle = 0 \ \forall n \in N_{vf} \}.$$

$$n \mapsto p_2^*(n): N_{vf} \cap N^0 \to \mathbb{Z}$$

$$n' \mapsto \{n, n'\}$$

En adelante, vamos a estar interesados en escoger una aplicación $p^*: N \to M^0$ queremos que recupere a p_1^* y p_2^*:

$$\begin{tikzcd}
N_{vf} \arrow[r, "p_1^*"] \arrow[d, hook] & M^0 \arrow[d] \\
N \arrow[r, "p_2^*"'] \arrow[ur, "p^*"] & \frac{M^0}{N_{vf}^{\perp}}
\end{tikzcd}$$

Queremos conmutatividad en el diagrama.

Dado una sencilla s, podemos considerar 2 toros:

$$X_s = T_M = \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[N])$$

y $$A_s = T_{N^\circ} = \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[M^\circ])$$

Denotamos

$$\left.\begin{array}{l} X_i = z^{e_i} \\ A_i = z^{f_i} \end{array}\right\}$$ Los llamaremos <u>variables de conglomerado.</u>

Comentario $(*)$

1) Sea $K = \ker p_2^*$. Tenemos

$$K \longrightarrow N \rightsquigarrow \mathbb{K}[K] \to \mathbb{K}[N] \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[N]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[K])$$

$$\boxed{X_s \to T_{K^*}}$$

$$N \to \frac{N}{N_{uf}} \rightsquigarrow \Bbbk[N] \to \Bbbk\left[\frac{N}{N_{uf}}\right]$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{Spec}\left(\Bbbk\left[\frac{N}{N_{uf}}\right]\right) \to \operatorname{Spec}(\Bbbk[N])$$

$$\boxed{T_{(N/N_{uf})^*} \to \mathcal{X}_s}$$

2) Sea $K^\circ = K \cap N^\circ$. Tenemos $K^\circ \hookrightarrow N^\circ$

$$\underset{\text{Dualidad}}{\rightsquigarrow} \quad M^\circ \to (K^\circ)^* \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{T_{K^\circ} \to \mathcal{A}_s}$$

$$N_{uf}^\perp \hookrightarrow M^\circ \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\mathcal{A}_s \to T_{N^\circ/N_{uf}\cap N^\circ} = \operatorname{Spec}(\Bbbk[N_{uf}^\perp])}$$

3) Con la aplicación $p^*: N \to M^\circ$ definimos una aplicación $p: \mathcal{A}_s \to \mathcal{X}_s$.

Además, p^* induce aplicaciones

$$p^*: R \to N_{vf}^{\perp} \quad \text{y} \quad p^*: \frac{N}{N_{vf}} \to (R^\circ)^*$$

$$\rightsquigarrow \boxed{p: T_{N^\circ/N_{vf}\cap N^\circ} \to T_{R^*}} \quad \text{y} \quad \boxed{p: T_{R^\circ} \to T_{(N/N_{vf})^*}}$$

Además, tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
T_{R^\circ} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & T_{(N/N_{vf})^*} \arrow[d] \\
\mathcal{A}_S \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \mathcal{X}_S \arrow[d] \\
T_{N^\circ/N_{vf}\cap N^\circ} \arrow[r, "p"'] & T_{R^*}
\end{tikzcd}$$

Con. 2)

Con. 1)

Ahora, vamos a definir la mutación de semillas.

Notación: si $r \in \mathbb{Q}$, $[r]_+ = \max(0, r)$.

Def. Sea s una semilla y $k \in I_{uf}$. La mutación $\mu_k(s)$ de s en k es una nueva semilla dada como sigue:

$I_{uf} = I_{mut}$ son los que mutamos.

$$e_i' = \begin{cases} -e_k & i = k \\ e_i + [\varepsilon_{ik}]_+ e_k & i \neq k \end{cases}$$

También sucede que $\{e_i' \mid i \in I_{uf}\}$ tenemos una base para N_{uf} y $\{d_i e_i' \mid i \in I\}$ es una base de N°.

Uno comprueba que bajo esta nueva base, la nueva base de M° está dada por

$$f_i' = \begin{cases} f_i & i \neq k \\ -f_k + \sum_j ([-\varepsilon_{kj}]_+ f_j) & \text{si } i = k. \end{cases}$$

También podemos decir cómo cambia (ε_{ij}) bajo este proceso.

$$\varepsilon_{ij} = \{e_i, e_j\} d_j$$

$$\varepsilon_{ij}' = \{\underline{e_i'}, \underline{e_j'}\} d_j = \begin{cases} -\varepsilon_{ij} & \text{si } i=k \text{ o } j=k \\ \varepsilon_{ij} & \varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} \leq 0 \text{ y } k \notin \{i,j\} \\ \varepsilon_{ij} + |\varepsilon_{ik}|\varepsilon_{kj} & \varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} > 0 \text{ y } k \notin \{i,j\} \end{cases}$$

Ahora, vamos a definir aplicaciones biracionales como levantamientos (pull-backs) de funciones:

$$\mu_k : \mathcal{X}_s \dashrightarrow \mathcal{X}_{\mu_k(s)} \qquad \mu_k : \mathcal{A}_s \dashrightarrow \mathcal{A}_{\mu_k(s)}$$

Si $n \in N$,

$$\mu_k^*(z^n) = z^n (1 + z^{e_k})^{-[n, e_k]}$$

Si $m \in M^\circ$,

$$\mu_k^*(z^m) = (1 + z^{v_k})^{-\langle d_k e_k, m \rangle}.$$

Reescribir esto en términos de variables de conglomerado:

$$\mu_k^*(X_i') = \begin{cases} X_k^{-1} & \text{si } i = k \\ X_i (1 + X_k^{-\operatorname{sgn}(\varepsilon_{ik})})^{-\varepsilon_{ik}} & i \neq k \end{cases}$$

(Recordemos, $X_i' = z^{e_i'}$, $X_i = z^{e_i}$)

$$\mu_k^*(A_i') = \begin{cases} A_i & i \neq k \\ A_k^{-1} \left(\prod_{j : \varepsilon_{kj} > 0} A_j^{\varepsilon_{kj}} + \prod_{j : \varepsilon_{kj} < 0} A_j^{-\varepsilon_{kj}} \right) & i = k \end{cases}$$

Recordemos, $\left(A_i' = z^{f_i'} \quad A_i = z^{f_i} \right)$

Obs. Las aplicaciones del Comentario (*) son compatibles con la notación:

$$\begin{tikzcd}
T_{K^0} \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathcal{A}_S \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "\mu_K"'] & \mathcal{X}_S \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mu_K"] & T_{K^*} \arrow[d, "="] \\
T_{K^0} \arrow[r] & \mathcal{A}_{\mu_K(S)} \arrow[r, "p"'] & \mathcal{X}_{\mu_K(S)} \arrow[r] & T_{K^*}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T_{(N/N_{uf})^*} \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathcal{X}_S \arrow[d, dashed, "\mu_K"] \\
T_{(N/N_{uf})^*} \arrow[r] & \mathcal{X}_{\mu_K(S)}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_S \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mu_K"'] & T_{N^0/N_{uf}\cap N^0} \arrow[d, "="] \\
\mathcal{A}_{\mu_K(S)} \arrow[r] & T_{N^0/N_{uf}\cap N^0}
\end{tikzcd}$$

Colecciones $\{X_s, \mu_k\}$, $\{A_s, \mu_k\}$.

Queremos pegar los toros usando los μ_k's.

Prop. (GHK15, Prop. 2.4). Resultado de pegado

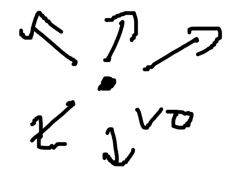
Resultados Grothendieck + lema de pegado en esquemas.

<u>Resulta:</u> $\mu_k \circ \mu_k : A_s \to A_{\mu_k(\mu_k(s))}$, esto no da la identidad.

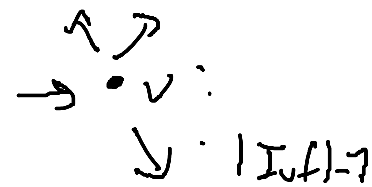
$$M^\circ \to M^\circ$$
$$m \mapsto m - \langle d_k e_k, m \rangle v_k$$

Denotemos T al árbol orientado con raíz v_0 donde cada vértice tiene $|I_{uf}|$ de flechas incidentes de la siguiente forma;

- v_0 todas flechas son salientes

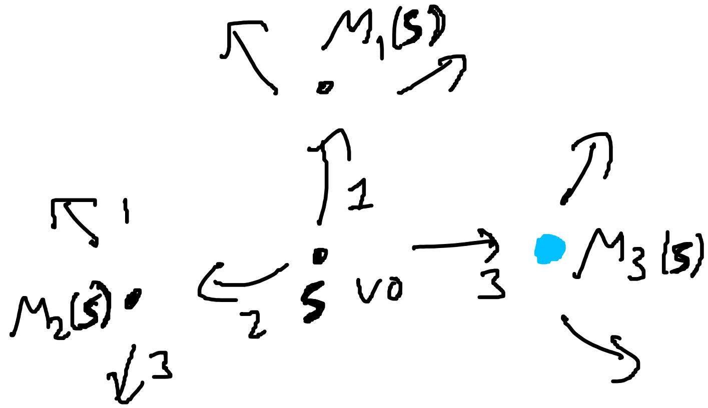


- Si $v \neq v_0$, tiene exact. 1 flecha entrante y $|I_{uf}|-1$ de flechas salientes



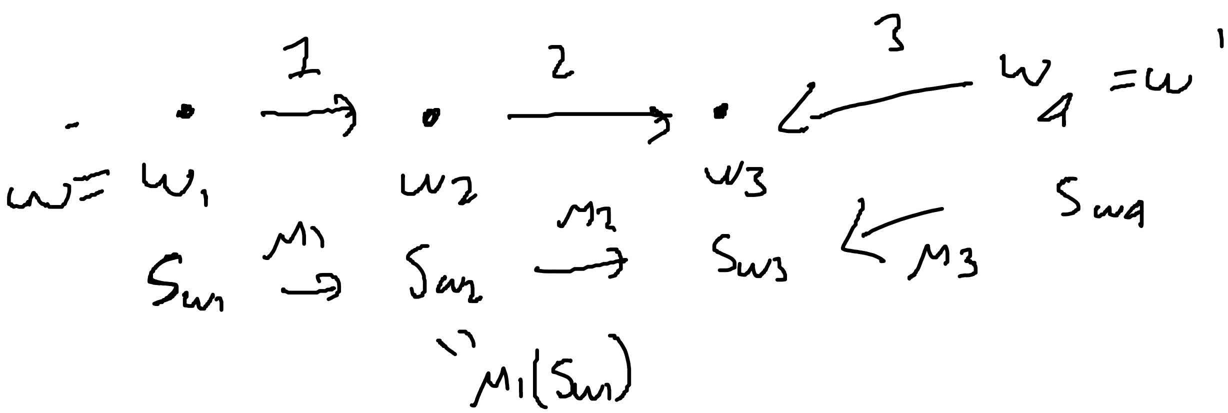
Vamos a asociar la semilla s (semilla inicial) a v_0 y utilizando los índices de $|I_{uf}|$, aplicamos mutaciones para etiquetar el árbol con semillas

$|I_{vf}| = 3$



A cada vértice, le asociamos una semilla s_w y también podemos asociar los toros X_{s_w} y A_{s_w}.

Si $w, w' \in T_1$, podemos encontrar un camino (sin orientación) de w a w'.



Si $w, w' \in T$, podemos encontrar una sucesión de mutaciones del toro $\mathcal{X}_{s_w} \dashrightarrow \mathcal{X}_{s_{w'}}$ y $\mathcal{A}_{s_w} \dashrightarrow \mathcal{A}_{s_{w'}}$

Consideramos las mutaciones y sus inversos en el camino que une a w con w'.

$$\mu_{w,w'} : \mathcal{X}_{s_w} \dashrightarrow \mathcal{X}_{s_{w'}} \quad , \quad \mu_{w,w'} : \mathcal{A}_{s_w} \dashrightarrow \mathcal{A}_{s_{w'}}$$

Tenemos un comportamiento adecuado para el pegado:

$$\mu_{w',w''} \circ \mu_{w,w'} = \mu_{w,w''} .$$

Def. La variedad $\mathcal{X}$ se obtiene al pegar la colección de toros $\{\mathcal{X}_w \mid w \in T\}$ usando las aplicaciones $\mu_{w,w'}$:

$$\mathcal{X} = \bigcup_{w \in T} \mathcal{X}_w \Big/ \sim_{\text{pegados}}$$

La variedad $\mathcal{A}$ se obtiene al pegar la colección de toros $\{\mathcal{A}_w \mid w \in T\}$ usando las aplicaciones $\mu_{w,w'}$:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{w \in T} \mathcal{A}_w \Big/ \sim_{\text{pegados}}$$

Def. La $\mathcal{X}$-álgebra de conglomerado es
$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}).$$

La $\mathcal{A}$-álgebra de conglomerado es
$$\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O}_{\mathcal{A}}).$$

Álgebra de conglomerado superior (Upper cluster algebra).