§4 La construcción de $\mathcal{A}$ del diagrama de difusión y la positividad del fenomeno de Laurent

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

30 de marzo 2022

Objetivo

Probar la positividad del fenómeno de Laurent.

1. construir $\mathcal{A}$ a partir de $\mathfrak{D}_s$ para
2. realizar las variables de conglomerado como funciones ϑ
3. probar la positividad en el caso de datos fijos con hipótesis de inyectividad
4. levantar las variables de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}_{\mathrm{prin}}$ (que satisface la hipótesis de inyectividad)

Los datos fijos y su dual de Langlands

Γ	$\Gamma^\vee$
$s = (e_i : i \in I)$	$s^\vee = (d_i e_i : i \in I)$
$\{d_i : i \in I\}$	$\{d_i^\vee := d_i^{-1} d\}, d := \mathrm{mmc}(d_i : i \in I)$
$N = (e_i : i \in I)$	$N^\vee := N^\circ = (d_i e_i : i \in I)$
$\{\cdot,\cdot\} : N \times N \to \mathbb{Q}$	$\{\cdot,\cdot\}^\vee := d^{-1}\{\cdot,\cdot\}$
$N_{\mathrm{mut}} = (e_i : i \in I_{\mathrm{mut}})$	$N^\vee_{\mathrm{mut}} = (d_i e_i : i \in I_{\mathrm{mut}})$
$N^\circ = (d_i e_i : i \in I)$	$(N^\vee)^\circ = (d e_i : i \in I)$
$M = (e_i^* : i \in I)$	$M^\vee = M^\circ$
$M^\circ = (f_i = e_i^* d_i^{-1} : i \in I)$	$(M^\vee)^\circ = d^{-1} M$
$\mathcal{A} := \mathcal{A}_\Gamma = \bigcup_{v \in \vec{\mathcal{T}}_s} T_{N^\circ, v}$	$\mathcal{A}^\vee := \mathcal{X}_{\Gamma^\vee} = \bigcup_{v \in \vec{\mathcal{T}}_s} T_{M^\circ, v}$
$\mathcal{X} := \mathcal{X}_\Gamma = \bigcup_{v \in \vec{\mathcal{T}}_s} T_{M, v}$	$\mathcal{X}^\vee := \mathcal{A}_{\Gamma^\vee} = \bigcup_{v \in \vec{\mathcal{T}}_s} T_{N, v}$

Conjectura de Positividad (Fomin–Zelevinsky 2002)

Sea $f_j' \in M^\circ$ con $j \in I_{\mathrm{mut}}$ asociado con una semilla s' y sea $s = (e_i : i \in I)$ una semilla inicial. Entonces, $z^{f_j'} \in \mathbb{N}[z^{f_i} : i \in I - I_{\mathrm{mut}}][z^{\pm f_i} : i \in I_{\mathrm{mut}}]$.

Notación

- Γ datos fijos que satisfacen la **hipótesis de inyectividad**:

$$p_1^* : N_{\mathrm{mut}} \hookrightarrow M^\circ, n \mapsto \{n, \cdot\},$$

- s una semilla inicial
- Δ_s^+ es el conjunto de las cameras de conglomerado en el diagrama de difusión consistente $\mathfrak{D}_s$,
- para un vértice $v \in \vec{\mathcal{T}}_s$ o un cono maximal $\sigma \in \Delta_s^+$ escribimos M_v° o $M_{s_v}^\circ$ o M_σ° etc.

Construcción de $\mathcal{A}_{\mathrm{scat}}$

Fijamos una semilla s

1. asignamos un toro $T_{N^\circ,\sigma} := T_{N^\circ}$ a cada $\sigma \in \Delta_s^+$,
2. dado $\sigma, \sigma' \in \Delta_s^+$ escojemos un camino γ de σ a σ' $\rightsquigarrow$ induce un automorfismo $\mathfrak{p}_{\gamma,\mathfrak{D}_s} : \widehat{k[P]} \to \widehat{k[P]}$ que no depende de γ,
3. recuerda: la única pared de $\mathfrak{D}_s$ en $e_k^\perp$ es $(e_k^\perp, 1 + z^{v_k})$ y todas las paredes en Δ_s^+ se obtienen de ellas aplicando $T_k^\pm$:

$$T_k^\pm(1 + z^{v_k}) = 1 + z^{T_k^\pm(v_k)} \quad \text{polinomio de Laurent positivo}$$

$\Rightarrow \gamma$ cruzando paredes define un mapeo biracional de T_{N°: $\mathfrak{p}_{\gamma,\mathfrak{D}_s} : k(M^\circ) \to k(M^\circ)$ y nos da una aplicación positiva

$$p_{\sigma,\sigma'} : T_{N^\circ,\sigma} \dashrightarrow T_{N^\circ,\sigma'}$$

Definición de $\mathcal{A}_{\mathrm{scat},s}$

Usando la Proposición 2.4 en [Gross–Hacking–Keel] definimos

Definición

Analoga a la definición de la $\mathcal{A}$-variedad de conglomerado definimos $\mathcal{A}_{\mathrm{scat},s}$ como el esquema obtenido pegando copias del toro T_{N° (una para cada $\sigma \in \Delta_s^+$) por los mapeos $p_{\sigma,\sigma'}$:

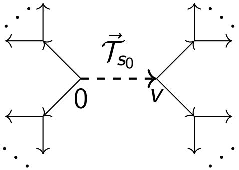
$$\mathcal{A}_{\mathrm{scat},s} = \bigcup_{\sigma \in \Delta_s^+} T_{N^\circ,\sigma}$$

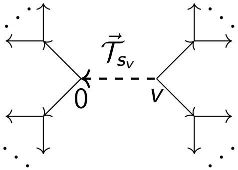
Independencia de la semilla inicial: el caso de $\mathcal{A}$

Para $\mathcal{A}_s = \bigcup_{v \in \vec{\mathcal{T}}_s} T_{N^\circ, v}$ escribimos $T_{N^\circ, v \in s}$ para enfatisar la semilla inicial.

Si $s' = s_v$ se obtiene de s por una secuencia de mutaciones nos identifica $\vec{\mathcal{T}}_{s'}$ como subgrafica de $\vec{\mathcal{T}}_s$ (los árboles sin orientación), lo cual induce

$$\mathcal{A}_{s'} \hookrightarrow \mathcal{A}_s \quad \text{(imersión abierta y automorfismo)} \tag{0.1}$$





$\Rightarrow \mathcal{A}_s$ es independiente de s.

Independencia de la semilla inicial: el caso de $\mathcal{A}_{\mathrm{scat}}$

Sea $\mu_{v,v'} : T_{M^\circ,v} \dashrightarrow T_{M^\circ,v'}$ la aplicación biracional que pega $T_{M^\circ,v}, T_{M^\circ,v'} \subset \mathcal{A}^\vee := \mathcal{X}_{\Gamma^\vee}$.

Proposición (4.3)

Sea s una semilla, $v = 0 \in \vec{\mathcal{T}}_s$ y $v' \in \vec{\mathcal{T}}_s \setminus \{v\}$. Sea $\mu^T_{v,v'} : M^\circ_v \to M^\circ_{v'}$ la tropicalización de Fock–Goncharov de la aplicación $\mu_{v,v'} : T_{M^\circ,v} \dashrightarrow T_{M^\circ,v'}$.

Para cada $\sigma' \in \Delta^+_s$ la restricción $\mu^T_{v,v'}|_{\sigma'}$ es un isomorfismo lineal con imagen $\sigma := \mu^T_{v,v'}(\sigma') \in \Delta^+_s$. Además, las aplicaciones lineales

$$\mu^T_{v,v'}|_{\sigma'} : M^\circ_{\sigma' \in s_{v'}} \to M^\circ_{\sigma \in s}$$

inducen un isomorfismos

$$T_{v',\sigma} : T_{N^\circ,\sigma\in s} \to T_{N^\circ,\sigma'\in s_{v'}} \quad \text{que pegan a} \quad \mathcal{A}_{\mathrm{scat},s} \to \mathcal{A}_{\mathrm{scat},s_{v'}}.$$

En particular, $\mathcal{A}_{\mathrm{scat}} := \mathcal{A}_{\mathrm{scat},s}$ no depende de s.

Isomorfismo de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_{\mathrm{scat}}$

Teorema (4.4)

Sea s una semilla, $v = 0 \in \vec{\mathcal{T}}_s$ y $v' \neq v$ un vértice de $\vec{\mathcal{T}}_s$. Definimos $\psi^*_{v,v'} : M^\circ_{v'} \to M^\circ_{v'}$ dado por la aplicación lineal $\mu^T_{v,v'}|_{\mathcal{C}^+_{v'} \in s}$, lo cual induce un automorfismo $\psi_{v,v'} : T_{N^\circ, v'} \to T_{N^\circ, v'}$.

Esos mapeos se pegan y dan un isomorfismo de espacios positivos

$$\psi : \mathcal{A}_s = \bigcup_{v' \in \vec{\mathcal{T}}_s} T_{N^\circ, v'} \to \bigcup_{v' \in \vec{\mathcal{T}}_s} T_{N^\circ, v'} = \mathcal{A}_{\mathrm{scat}, s}$$

Además, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_s \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(0.1)"'] & \mathcal{A}_{\mathrm{scat},s} \arrow[d, "\text{Proposición 4.3}"] \\
\mathcal{A}_{s_{v'}} \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{A}_{\mathrm{scat},s_{v'}}
\end{tikzcd}$$

Monomios de conglomerado

Definición (4.8)

Fijamos Γ y s. Sea $s_v = (e'_i : i \in I)$ con bases asociadas $\{(e'_i)^*\}_{i \in I}$ y $\{f'_i\}_{i \in I}$. Un **monomio de conglomerado en** s_v es un monomio en las coordenadas del toro $T_{N^\circ,v} \subset \mathcal{A}$ de la forma z^m con $m = \sum_{i \in I} a_i f_i$ donde $a_i \geq 0$ para $i \in I_{\mathrm{mut}}$. Un **monomio de conglomerado** es un monomio de conglomerado para alguna semilla $s_{v'}$.

Fenómeno de Laurent (Fomin–Zelevinsky 2002)

Sean $\{A_i : i \in I\}$ las $\mathcal{A}$-variables de conglomerado de la semilla s y sea $A'_j = z^{f'_j}, j \in I_{\mathrm{mut}}$. Entonces, $A'_j \in \mathbb{Z}[A_i : i \in I - I_{\mathrm{mut}}][A_i^{\pm 1} : i \in I_{\mathrm{mut}}]$.

Conjectura de Positividad (Fomin–Zelevinsky 2002)

$A'_j \in \mathbb{N}[A_i : i \in I - I_{\mathrm{mut}}][A_i^{\pm 1} : i \in I_{\mathrm{mut}}]$.

Monomios de conglomerado y funciones ϑ

Teorema (4.9)

Sean Γ los datos fijos que satisfacen la inyectividad de p_1^* y sea s una semilla inicial. Fijamos $Q \in \mathcal{C}_s^+$ y $m \in \sigma \cap M^\circ$ para un $\sigma \in \Delta_s^+$.

Entonces, $\vartheta_{Q,m}$ es un **polinomio de Laurent positivo** y una expresión en s de un **monomio de conglomerado**. Además, todos los monomios de conglomerado tienen expresiones de esta forma.

Nota que el Teorema 4.9 implica la conjetura de positividad siempre cuando los datos fijos satisfacen la inyectividad de p_1^*.

Prueba del Teorema 4.9

1. Tenemos $\psi : \mathcal{A} \cong \mathcal{A}_{\mathrm{scat}}$ (Teorema 4.4 y Proposición 4.3). Sea $v = 0 \in \vec{\mathcal{T}}_s$ y $v' \in \vec{\mathcal{T}}_s \setminus \{0\}$. Un monomio de conglomerado en $s_{v'}$ es de forma z^m en $T_{N^\circ,v'}$ con $m \in \mathcal{C}^+_{s_{v'}} \cap M^\circ_{v'}$.
2. Localmente ψ es pegado de $\psi_{v,v'} : T_{N^\circ,v'} \to T_{N^\circ,v'}$ tal que
$$(\psi^{-1}_{v,v'})^*(z^m) = z^{\mu^T_{v,v'}(m)} \quad \text{en} \quad T_{N^\circ,v'} \subset \mathcal{A}_{\mathrm{scat},s}$$
y Proposición 4.3 $\Rightarrow \mu^T_{v,v'}(\mathcal{C}^+_{s_v} \subset \Delta^+_{s_v}) = \mathcal{C}^+_{v' \in s} \subset \Delta^+_s$.
Entonces, en $\mathcal{A}_{\mathrm{scat},s}$ los monomios de conglomerado en v' son de la forma z^m con $m \in \mathcal{C}^+_{v' \in s}$.
3. Para $Q_{v'} \in \mathrm{Int}(\mathcal{C}^+_{v' \in s})$ tenemos $\vartheta_{Q_{v'},m} = z^m$, con $m \in \mathcal{C}^+_{v' \in s}$ (Corolario 3.9)

Prueba del Teorema 4.9

Falta calcular la expresión de $\vartheta_{Q_{v'},m}$ en las coordenadas del toro inicial $T_{N^\circ,v}$:

1. Sea γ un camino que empieza en $Q_{v'}$ y termina en $Q \in \mathcal{C}_s^+$.
   Teorema 3.5 $\Rightarrow \mathfrak{p}_{\gamma,\mathfrak{D}_s}(\vartheta_{Q_{v'},m}) = \vartheta_{Q,m}$, es decir $\vartheta_{Q,m}$ si es una expresión de un monomio de conglomerado.
2. Para la positividad: recuerda del Teorema 1.13 que las funciones de las paredes f_δ de $\mathfrak{D}_s$ son de forma $(1+z^m)^c$ con $m = p^*(n), n \in N^+$ y $c \geq 0$.
   $\Rightarrow$ son polinomios de Laurent positivos
3. $\vartheta_{Q,m}$ se construyó de lineas quebradas y aplicando las funciones de paredes a monimios de Laurent.
   $\Rightarrow$ $\vartheta_{Q,m}$ es una serie de Laurent positiva
4. Pero $\vartheta_{Q,m}$ es una expresión de un monomio de Laurent en una semilla: Fenomeno de Laurent $\Rightarrow$ $\vartheta_{Q,m}$ es un polinomio de Laurent.

Coeficientes principales

Dado los datos fijos Γ definimos los **datos fijos con coeficientes principales** Γ_{prin}:

1. la latiz $\tilde{N} := N \oplus M^{\circ}$ con forma bilineal:

$$\{(n_1, m_{,1}), (n_2, m_s)\} := \{n_1, n_1\} + \langle n_1, m_2\rangle - \langle n_2, m_1\rangle.$$

2. $\tilde{N}_{\mathrm{mut}} := N_{\mathrm{mut}} \oplus \{0\}$
3. $\tilde{I} = I_1 \cup I_2$, donde $I_1 = I_2 = I$ y $\tilde{I}_{\mathrm{mut}} := (I_1)_{\mathrm{mut}}$

La $\mathcal{A}$-**variedad con coeficientes principales** es $\mathcal{A}_{\mathrm{prin}} := \mathcal{A}_{\Gamma_{\mathrm{prin}}}$.

Una semilla $s = (e_i : i \in I)$ para Γ determina una semilla de Γ_{prin}

$$\tilde{s} := ((e_i, 0)_{i\in I}, (0, f_i)_{i\in I}).$$

Ejercicio: $\mu_k(\tilde{s}) \neq \widetilde{\mu_k(s)}$.

Ejemplo: coeficientes principales

Sea $N = \mathbb{Z}^2 = N_{\mathrm{mut}} = N^\circ$ con forma bilineal definida por $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ con respecto a $s = (e_1, e_2)$.

Entonces, $\tilde{N} = N \oplus M$ y $\tilde{s} = (e_1, e_2, e_1^*, e_2^*)$. La matriz que representa la forma bilineal en $\tilde{N}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las primeras dos filas representan la matriz $\epsilon_{\tilde{s}}$. Por lo tanto la matriz que define la aplicación lineal $\tilde{p}_1^* : \tilde{N}_{\mathrm{mut}} = N \to \tilde{M}^\circ = M \oplus N$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En particular, $\tilde{p}_1^*$ es inyectiva. En general, la matriz que define $\tilde{p}_1^*$ con respecto a la semilla $\tilde{s}$ consiste de dos bloques, uno de los cuales es la identidad.

$\Rightarrow$ Γ_{prin} *siempre* satisface la hipítesis de la inyectividad.

Compactificaciones parciales desde variables congeladas

Si $I \neq I_{\mathrm{mut}}$ las coordenadas $A_i = z^{f_i}$ para $i \in I - I_{\mathrm{mut}}$ pertenecen a cada toro T_{N°. Agregamos divisores $\{A_i = 0\}, i \in I - I_{\mathrm{mut}}$, es decir reemplazamos el toro $T_{N^\circ,s}$ por

$$T_{N^\circ,s} \subset \mathrm{TV}(\Sigma^s) \cong \mathbb{A}^{|I-I_{\mathrm{mut}}|} \times (k^*)^{|I_{\mathrm{mut}}|},$$

donde $\Sigma^s = \mathbb{R}_{\geq 0} e_i$. Definimos $\bar{\mathcal{A}} = \bigcup_{v \in \vec{\mathcal{T}}_s} TV(\Sigma^{s_v})$ con su proyección natural

$$\pi : \bar{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^{|I-I_{\mathrm{mut}}|} \quad \text{con coordenadas } A_i, i \in I - I_{\mathrm{mut}}$$

Compactificaciones parciales de $\mathcal{A}_{\mathrm{prin}}$

Sean Γ datos fijos, s una semilla y Γ_{prin} los datos fijos con coeficientes principales.

Proposición (B.11)

El espacio $\mathcal{A}_{\mathrm{prin}}$ solo depende de la clase de equivalencia de la semilla inicial $[s]$. Pero la semilla inicial s determina

1. una compactificación parcial $\mathcal{A}_{\mathrm{prin}} \subset \bar{\mathcal{A}}^{s}_{\mathrm{prin}}$, y
2. una extensión canónica de cada $\mathcal{A}$-variable de conglomerado a una variable de conglomerado de $\mathcal{A}_{\mathrm{prin}}$.

Prueba

1. Para Γ_{prin} tenemos n direcciones congeladas que corresponden a I_2. Dada una semilla inicial s compactificamos

$$\bar{\mathcal{A}}^{s}_{\mathrm{prin}} := \bigcup_{v \in \vec{\mathcal{T}}_s} T_{N^\circ, s} \times \mathbb{A}^n_{X_i, i \in I} \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n_{X_i, i\in I}$$

donde $X_i = z^{(e_i, 0)}$.

2. $[s] \leftrightarrow [\tilde{s}]$, para $s' \in [s]$ sea $\tilde{s}' \in [\tilde{s}]$ la semilla correspondiente, entonces

$$\tilde{s}' = ((e_i', 0)_{i\in I}, (g_i)_{i\in I}), \quad \text{donde } s' = (e_i')_{i \in I}.$$

Tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_{\mathrm{prin}} \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{A} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\pi"] \\ T_M & \{1\} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

y la variable $\tilde{A}_i'$ de $\mathcal{A}_{\mathrm{prin}}$ se restringe a la variable A_i' de $\mathcal{A}$ en la fibra del 1.

La positividad del fenómeno de Laurent

Teorema (4.10)

Cada variable de conglomerado de una $\mathcal{A}$-variedad es un polinomio de Laurent positivo con coeficientes enteros en las variables de cualquier semilla dada.

Prueba: Sea $s = (e_i : i \in I)$ una semilla inicial y $s' \in [s]$.

$\overset{\text{Proposición B.11}}{\Longrightarrow}$ cada variable $A_i' \in s'$ de $\mathcal{A}$ se extiende de manera única a una variable $\tilde{A}_i'$ de $\mathcal{A}_{\mathrm{prin}}$.

Γ_{prin} satisface que p_1^* es inyectiva.

$\overset{\text{Teorema 4.9}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{A}_i' \in \mathbb{N}[A_i^{\pm 1}, X_i]_{i \in I}$ donde A_i, X_i son las coordenadas de $\tilde{s}$. La expresión de A_i' en s se obtiene de la de $\tilde{A}_i'$ en $\tilde{s}$ evaluando $X_i = 1$.