Degeneraciones tóricas de compactificaciones de A variedades

Basado en GHKK §8.5

11/05/22

Sea V una variedad de conglomerado, y sea $\Theta \subset (V^\vee)^{trop}(\mathbb{Z})$ el subconjunto tal que $\vartheta_{p,x}$ es suma finita para los puntos $x \in \Delta^+$, además tenemos el álgebra intermedia $mid(V)$ generada por las funciones $\{\vartheta_p \mid p \in \Theta\}$, y un homomorfismo de álgebras

$$\nu : mid(V) \longrightarrow up(V)$$

Ahora, si Θ corresponde a todos los puntos del espacio tropical, es decir, si $\Theta = (V^\vee)^{trop}(\mathbb{Z})$, y si ν es biyectiva, entonces $mid(V) = up(V)$. Se cumple la conjetura de Fock Goncharov completa.

Más aún, tenemos

$$ord(V) \subseteq mid(V) = up(V) = can(V)$$

$\mathrm{Can}(V)$ sería el álgebra canónica para cada variedad de conglomerado donde la idea es construir una base y escribir a los elementos del álgebra como combinaciones lineales de elementos de la base.

Tenemos
$$\mathrm{Can}(V) = \bigoplus_{q \in V^{\vee}(\mathbb{Z}^{T})} \mathbb{K} \cdot \vartheta_q$$

Con estructura de álgebra dada por las constantes de estructura α. tal que para $p, q \in V^{\vee}(\mathbb{Z}^{T})$, $\alpha(p,q,r) = 0$ para todos, menos una cantidad finita de $r \in V^{\vee}(\mathbb{Z}^{T})$ y $\vartheta_p \cdot \vartheta_q = \sum_r \alpha(p,q,r)\vartheta_r$.

– Podemos pensar en el álgebra $\mathrm{mid}(V)$ descrita por las funciones ϑ.

Ejemplo: Si $V = T_L$, entonces $\mathrm{Can}(T_L) = \bigoplus_{\ell \in L^*} \mathbb{C} x^{\ell} = \mathbb{C}[L^*]$

Algunas definiciones:

- Una función lineal a trozos en un espacio vectorial W es una función continua $f: W \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal a trozos con respecto a un abanico finito compuesto por conos convexos. Además, decimos que f es convexa mínima si satisface

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \geq \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

para todo $v_i \in W$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

- Una función lineal a trozos $f: V(\mathbb{R}^T) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal después de fijar una semilla S para obtener una identificación

$$V(\mathbb{R}^T) = L_{\mathbb{R}, S}$$

Recordemos que un conjunto $S \subset V(\mathbb{R}^T)$ es positivo si para enteros no negativos d_1, d_2, $p_1 \in d_1 S(\mathbb{Z})$, $p_2 \in d_2 S(\mathbb{Z})$ y $r \in V(\mathbb{Z}^T)$ con $\alpha(p_1, p_2, r) \neq 0$, tenemos $r \in (d_1 + d_2) S(\mathbb{Z})$.

- Esta era el equivalente para construcción de variedades tóricas asociadas a politopos convexos, pues recordemos que

$$C(S)(\mathbb{Z}) \text{ define un anillo graduado}$$

Ahora consideremos una función lineal a trozos $f : V(\mathbb{R}^T) \to \mathbb{R}$, la cual decimos que es decreciente si para $p_1, p_2, r \in V(\mathbb{R}^T)$ con $\alpha(p_1, p_2, r) \neq 0$

$$f(r) \geq f(p_1) + f(p_2)$$

Sea

$$S_f := \{x \in A^{\vee}_{prin}(\mathbb{R}^T) \mid f(x) \geq -1\}$$

bajo alguna identificación $V(\mathbb{R}^T) = L_{\mathbb{R},s}$

para alguna semilla s y una lattice L, entonces

$$S_f \subset L_{\mathbb{R},s} \text{ es un politopo convexo.}$$

- Lema: Si $f: V(\mathbb{R}^T) \to \mathbb{R}$ es decreciente, entonces S_f es positivo.

Además, S_f es compacto sí y sólo sí $f: V(\mathbb{R}^T) \to \mathbb{R}$ es estrictamente negativa.

Objetivo: Conseguir compactificaciones parciales de

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{can}(A_{prin}))$$

usando politopos positivas en $A^{\vee}_{prin}(\mathbb{R}^T)$.

- Estas compactificaciones dan degeneraciones tóricas con fibra sobre el espacio afín $\mathbb{A}^n$; fibra especial $\pi^{-1}(0)$ una variedad tórica, y fibra genérica una var. log CY.

Fijemos una semilla $s = (e_1, \cdots, e_n)$, y sea $N_s^{\oplus} \subset N$ el monoide generado por los e_i's. También denotemos por $N_{s,\mathbb{R}}^{\oplus} \subset N_{\mathbb{R}}$ al cono correspondiente. Cada semilla nos da una identificación

$$\mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{Z}^T) = \widetilde{M}^o_s = M^o \oplus N$$

En particular, determina una proyección

$$\pi_N : \mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{Z}^T) \to N \quad (\text{depende de } s)$$

Tenemos una inclusión canónica $N \subset \mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{Z}^T)$ dada en cada semilla por $N = 0 \oplus N \subset \widetilde{M}^o_s = \mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{Z}^T)$, y una acción de N en $\mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{Z}^T)$. $\mathrm{Can}(\mathcal{A}_{prin})$ es un $\mathbb{K}[N]$-modulo.

- Consideremos un politopo compacto, positivo, racional de dimensión máxima $\Xi \subseteq \check{A}_{prin}(\mathbb{R}^T)$, y sea $S = \mathrm{can}(A_{prin})$. entonces
- Lema: S es una $\mathbb{K}[N]$-algebra con estructura de $\mathbb{K}$-algebra dada por las constantes de estructura $\alpha(p,q,r)$
- La idea es que la existencia de estos politopos permiten tener una regla de multiplicación con finitud y $\therefore$ una estructura de algebra en $\mathrm{Can}(V)$.

- Definición: un monómio global en una variedad de conglomerado es una función regular en V tal que al reestringirse a un toro del del atlas es un caracter.

- Ej: En la A variedad, los monómios de conglomerado son monomios globales, esto es: ord(V) está generada por monomios globales.

- Def: Decimos que una variedad de conglomerado V tiene suficientes monomios globales (EGM), si para cada punto $v \in V^{trop}(\mathbb{Z}^T)$ (pensado como valuación) existe un monomio global f con

$$v(f) < 0$$

- La idea es que si $V^\vee$ satisface EGM, entonces $can(V)$ tiene estructura de $\mathbb{K}$-álgebra conmutativa y asociativa.

Teorema

Sea $V = \mathcal{A}_{prin}$ o $\mathcal{X}$. Asumiendo que $V^\vee$ tiene la condición EGM. y que $\Xi \subseteq V^\vee(\mathbb{R}^T)$ es un politopo positivo racional, entonces

$$\tilde{S}_{\Xi} = \bigoplus_{d \geq 0} \bigoplus_{q \in d\Xi(\mathbb{Z})} \mathbb{K}\vartheta_q T^d \subset \mathrm{can}(V)[T] \qquad (*)$$

es una $\mathbb{K}$-subálgebra finitamente generada.

Lema: El conjunto $\pi_N^{-1}(N^{\oplus}_{s,\mathbb{R}}) \subset \mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{R}^T)$ es un politopo positivo. Denotemos por $S_{N_s^{\oplus}}$ la parte de elementos de grado 0 del anillo $\tilde{S}_{\pi_N^{-1}(N_{s,\mathbb{R}}^{\oplus})}$. Entonces $S_{N_s^{\oplus}}$ es una $\mathbb{K}[N_s^{\oplus}]$-álgebra finitamente generada.

Algunos puntos a considerar de la prueba del lema anterior son

- Si escribimos $\tilde{\Xi} = \Xi + N_{\mathbb{R}}$ y $\Xi^{+} = \tilde{\Xi} \cap \pi_N^{-1}(N^{\oplus}_{s,\mathbb{R}})$ entonces $\tilde{\Xi}$ es positivo (prop 8.11), y Ξ^{+} es positivo por ser intersección de 2 positivos.

- Tenemos anillos graduados asociados

$$\tilde{S}_{\tilde{\Xi}} \quad y \quad \hat{S} := \tilde{S}_{\Xi^{+}}$$

Siendo $\tilde{S}$ anillo graduado por T en $(*)$.

- $S_{N_S^{\oplus}}$ es el conjunto de elementos de grado 0 en la localización $\tilde{S}_T$.

- De lo anterior se sigue que hay una inclusión

$$\operatorname{Spec}(S_{N_S^{\oplus}}) \subset \operatorname{Proj}(\tilde{\hat{S}})$$

- Tenemos un morfismo

$$\operatorname{Proj}(\tilde{\hat{S}}) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{K}[N_S^{\oplus}])$$

el cual es un morfismo plano

Teorema 8.39:

La fibra central de

$$(\mathrm{Spec}(S_{N_0}^{+}) \subset \mathrm{Proj}(\tilde{S})) \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

es la variedad tórica polarizada $T_{N^0} \subset \mathbb{P}_{\overline{\Xi}}$ dada por

$\overline{\Xi} = p^{+}(\Xi)$, donde $p: \mathbb{A}^\vee_{prin} \longrightarrow \mathbb{A}^\vee$ está dada por

$$p^0 : M^0 \oplus D \cdot N \longrightarrow M^0, \qquad (m, Dn) \longmapsto m \quad //$$