

Líneas quebradas

Seminario variedades de conglomerado

23 de marzo de 2022

[GHKK18, §3]

**Intro:** Las líneas quebradas permiten definir a las funciones Theta, las cuales juegan un rol importante en el problema de encontrar una base canónica para un álgebra de conglomerado.

Se ha demostrado que el generado de las funciones Theta (cuando existen), se encuentra entre el álgebra de conglomerado y el álgebra de conglomerado superior:

$$\text{ord}(V) \subset \text{mid}(V) \subset \text{up}(V)$$

**Objetivo:** Para cada variedad de conglomerado  $V$ , construir un álgebra, llamada  $\text{mid}(V)$ , por medio de una base (base Theta) definida de manera combinatoria a partir de las líneas quebradas.

**Problema:** Las funciones Theta son difíciles de manejar: En el caso no finito y rango superior a 2, no es fácil encontrar el diagrama de difusión asociado. Por lo anterior, es de gran interés realizar el cálculo de fórmulas explícitas para las funciones Theta.

Recordaris:

\* Datos fijos:

- $S = (e_i : i \in I)$
- $\{\cdot, \circ\} : N \times N \rightarrow \mathbb{Q}$
- $N = \langle e_i, i \in I \rangle$
- $N_{\text{mut}} = \langle e_i, i \in I_{\text{mut}} \rangle$
- $N^\circ = \langle d_i e_i, i \in I \rangle$
- $M^\circ = \langle f_i, i \in I \rangle = \text{Hom}(N^\circ, \mathbb{Z})$
- $M = \langle d_i f_i, i \in I \rangle = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$
- $v_i = \{e_i, -\} = \sum_{j \in I} \varepsilon_{ij} d_j f_j \in M^\circ$

\* Hipótesis de inyectividad:

$$\rho_1^* : N_{\text{mut}} \rightarrow M^\circ \quad \text{es inyectiva.}$$
$$n \mapsto \{n, -\}$$

$$* N^+ := N_s^+ := \left\{ \sum_{i \in I_{\text{mut}}} a_i e_i \mid a_i \geq 0, \sum a_i > 0 \right\}$$

$$* \text{Si } N \simeq \mathbb{Z}^n \simeq M \Rightarrow M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$$

$$* \mathcal{L}_s^+ = \{ m \in M_{\mathbb{R}} : \langle e_i, m \rangle \geq 0 \text{ para } i \in I_{\text{mut}} \}$$

Recordar: Un diagrama de difusión  $\mathcal{D} = \{(\sigma, f_\sigma)\}$  en  $M_{\mathbb{R}}$  es una colección finita o infinita contable de paredes, donde  $\sigma$  es un cono de codimensión 1 en  $M_{\mathbb{R}}$  llamado el soporte de la pared y  $f_\sigma$  es una serie de potencias formal.

$$\ast \text{ Supp}(\mathcal{D}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda \subset M_{\mathbb{R}}$$

$$\ast \mathcal{D}_{in} := \{(e_i^\perp, 1 + z^{v_i})\}_{i \in I_{mut}}$$

$$\ast \text{Sing}(\mathcal{D}) = \bigcup \text{frontera}(\sigma) \cup \bigcup_{d=n-2} (\sigma_1 \cap \sigma_2), \quad d = \dim(\sigma_1 \cap \sigma_2).$$

\* Def. 1.2. Sea  $n_0 \in \mathbb{N}^+$ ,  $m_0 := P_1^*(n_0)$  y  $f = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{km_0} \in \widehat{\mathbb{K}[P]}$ . Se define  $P_f$  como el automorfismo de  $\widehat{\mathbb{K}[P]}$  dado por

$$P_f(z^m) = f^{\langle n_0, m \rangle} z^m.$$

\* Dado un diagrama de difusión  $\mathcal{D}$  con  $\gamma: [0,1] \rightarrow M_{\mathbb{R}} \setminus \text{Sing}(\mathcal{D})$  tal que  $\gamma(t_i) \in \sigma_i$  para  $\sigma_i \in \mathcal{D}$  y  $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_s < 1$ , se tiene para cada  $i$

$$\star \quad \varepsilon_i = \begin{cases} +1 & \langle n_0, \gamma'(t_i) \rangle < 0, \\ -1 & \langle n_0, \gamma'(t_i) \rangle > 0. \end{cases}$$

$$\star \quad P_{\gamma, \mathcal{D}}^k = P_{n_r, f_{\sigma_r}}^{\varepsilon_r} \circ \dots \circ P_{n_2, f_{\sigma_2}}^{\varepsilon_2} \circ P_{n_1, f_{\sigma_1}}^{\varepsilon_1}$$

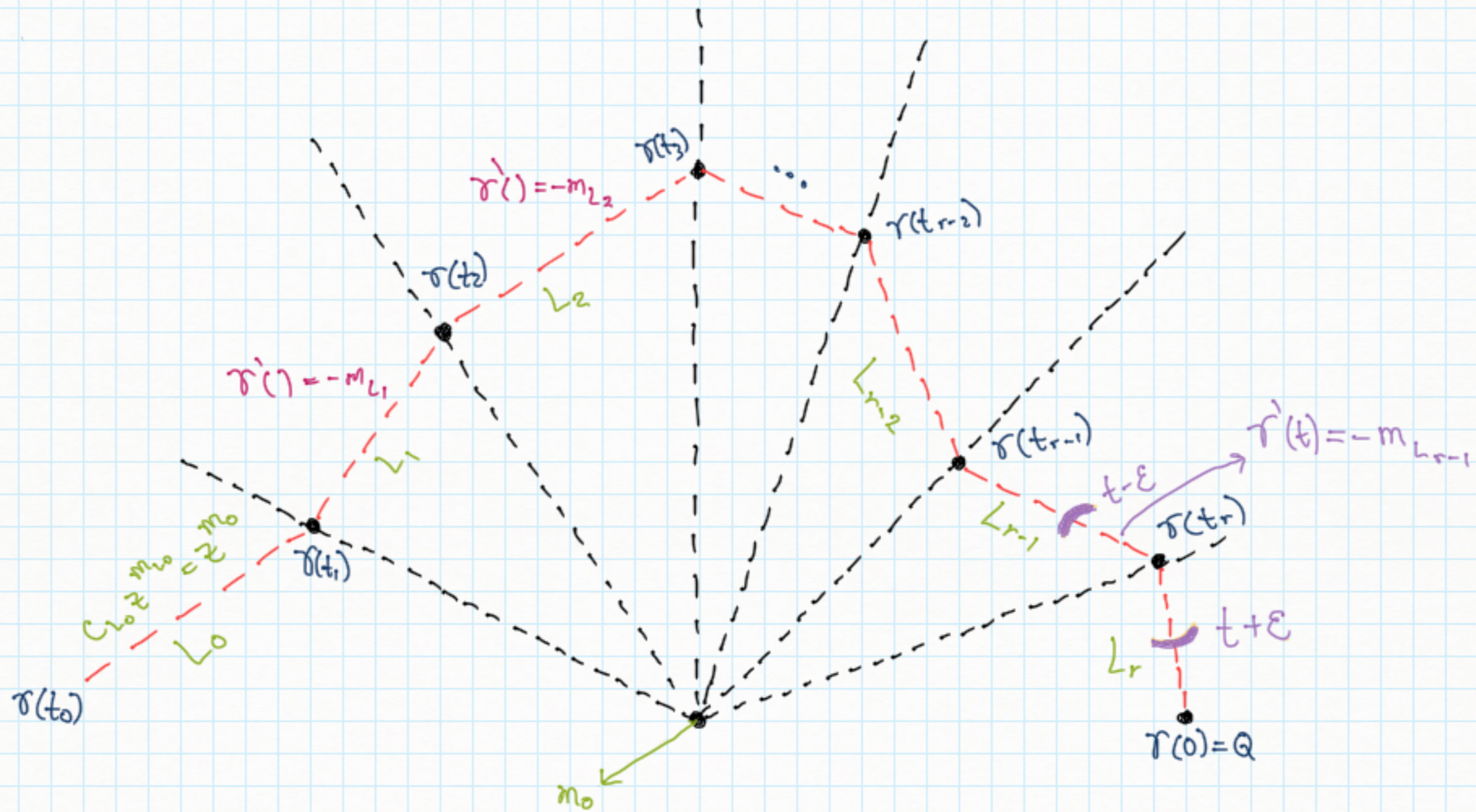
$$\star \quad P_{\gamma, \mathcal{D}} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\gamma, \mathcal{D}}^k.$$

**Def. 3.1.** Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama de difusión,  $m_0 \in M^0 \setminus \{0\}$  y  $Q \in M_{\mathbb{R}} \setminus \text{Supp}(\mathcal{D})$ . Una **línea quebrada** con exponente  $m_0$  y punto final  $Q$  es un camino propio continuo lineal por partes  $\gamma: (-\infty, 0] \rightarrow M_{\mathbb{R}} \setminus \text{Sing}(\mathcal{D})$  con un número finito de dominios de linealidad. Este camino viene acompañado de un monomio  $c_L z^{m_L} \in \mathbb{K}[M^0]$  para cada dominio de linealidad  $L \subseteq (-\infty, 0]$  de  $\gamma$ , y se satisface:

- (1)  $\gamma(0) = Q$  (Punto final de la línea quebrada).
- (2) Si  $L$  es el primer dominio de linealidad de  $\gamma$ , entonces  $c_L z^{m_L} = z^{m_0}$  (monomio asociado).
- (3) Para  $t$  en un dominio de linealidad  $L$ ,  $\gamma'(t) = -m_L$  (Velocidad).
- (4) Sea  $t \in (-\infty, 0)$  un punto sobre el cual  $\gamma$  es no lineal, pasando de  $L$  a  $L'$ . Sea  $\mathcal{D}_t = \{(\sigma, f_\sigma) \in \mathcal{D} \mid \gamma(t) \in \sigma\}$ .

Entonces  $c_{L'} z^{m_{L'}}$  es un término de la serie de potencias formal  $\mathcal{P}_{\gamma|_{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)}, \mathcal{D}_t}(c_L z^{m_L})$ .  
 (Formas en las que se puede quebrar la línea).

Esquema general



Nota: En el ítem (4) de la definición anterior, si  $\gamma_t$  es el segmento de  $\gamma$  para el intervalo  $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ ,  $\gamma_t$  podría cruzar múltiples paredes  $(\sigma, f_\sigma)$  en el punto  $t$ . Debido a que  $\gamma$  no interseca a  $\text{Sing}(\mathcal{D})$ , estas paredes comparten un vector normal  $n_\sigma \in N^+$ . Adicionalmente  $\dot{\sigma}(t) = -m_\perp$  justo antes de que  $\gamma$  cruce dichas paredes. Por lo anterior

$$\varepsilon_t = \begin{cases} +1 & \langle n_\sigma, \dot{\sigma}(t) \rangle < 0, \\ -1 & \langle n_\sigma, \dot{\sigma}(t) \rangle > 0. \end{cases} = \begin{cases} +1 & \langle n_\sigma, m_\perp \rangle > 0, \\ -1 & \langle n_\sigma, m_\perp \rangle < 0. \end{cases}$$

De esta manera,  $\varepsilon_t \langle n_\sigma, m_\perp \rangle = |\langle n_\sigma, m_\perp \rangle|$ , y

$$P_{\gamma|_{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)}, \mathcal{D}_t}(C_\perp z^{m_\perp}) = C_\perp z^{m_\perp} \prod_{(\sigma, f_\sigma) \in \mathcal{D}_t} f_\sigma^{|\langle n_\sigma, m_\perp \rangle|}.$$



**Def. 3.3.** Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama de difusión,  $m_0 \in M^0 \setminus \{0\}$ ,  $Q \in M_{\mathbb{R}} \setminus \text{Supp}(\mathcal{D})$ . Para una línea quebrada con exponente  $m_0$  y punto final  $Q$ , se define:

- $I(\tau) = m_0$
- $b(\tau) = Q$ ,
- $\text{Mono}(\tau) = c(\tau)z^{F(\tau)}$ , el monomio asociado al dominio de linealidad final de  $\tau$ .
- $\mathcal{J}_{Q, m_0} = \sum_{\tau} \text{Mono}(\tau)$ , con  $\tau$  cualquier línea quebrada con  $I(\tau) = m_0$  y  $b(\tau) = Q$ .

**Proposición 3.5.** Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama de difusión consistente,  $m_0 \in M^0 \setminus \{0\}$ ,  $Q, Q' \in M_{\mathbb{R}} \setminus \text{Supp}(\mathcal{D})$  con coordenadas irracionales. Entonces para cualquier camino  $\gamma$  con puntos finales  $Q$  y  $Q'$  se tiene

$$\mathcal{J}_{Q', m_0} = P_{\gamma, \mathcal{D}}(\mathcal{J}_{Q, m_0}).$$

**Proposición 3.6.**  $T_\kappa$  define una correspondencia 1-1 entre las líneas quebradas de  $\mathcal{D}_{s, m_0, Q}$  y las líneas quebradas de  $\mathcal{D}_{\mu_\kappa(s), T_\kappa(m_0), T_\kappa(Q)}$ . En particular, dependiendo si  $Q \in \mathcal{H}_{\kappa,+}$  o  $\mathcal{H}_{\kappa,-}$  se tiene que:

$$\mathcal{J}_{T_\kappa(Q), T_\kappa(m_0)}^{\mu_\kappa(s)} = T_{\kappa, \pm}(\mathcal{J}_{Q, m_0}^s).$$

**Proposición 3.8.** Sea  $Q \in \text{Int}(C_s^+)$  y sea  $m \in C_s^+ \cap M^0$ . Entonces  $\mathcal{J}_{Q, m} = z^m$ .

**Corolario 3.9.** Sea  $\sigma \in \Delta_s^+$  una cámara de conglomerado y sea  $Q \in \text{Int}(\sigma)$ ,  $m \in \sigma \cap M^0$ . Entonces  $\mathcal{J}_{Q, m} = z^m$ .

Ejemplo:  $N = N^0 = N_{\text{mot}} = \mathbb{Z}^2$ ,  $d_1 = d_2 = 1$  y  $\{\cdot, \cdot\}: N \times N \rightarrow \mathbb{Q}$  dada por  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , con  $\varepsilon_{ij} = \{e_i, e_j\}$ .  
 Sea  $f_1, f_2$  la base dual de  $e_1, e_2$  y sea  $A_1 = z^{f_1}$ ,  $A_2 = z^{f_2}$ , entonces

$$\mathcal{D}_{\text{in},s} = \{(e_1^\perp, 1 + z^{p^*(e_1)}), (e_2^\perp, 1 + z^{p^*(e_2)})\}$$

$$= \{(e_1^\perp, 1 + A_2), (e_2^\perp, 1 + A_1^{-1})\}$$

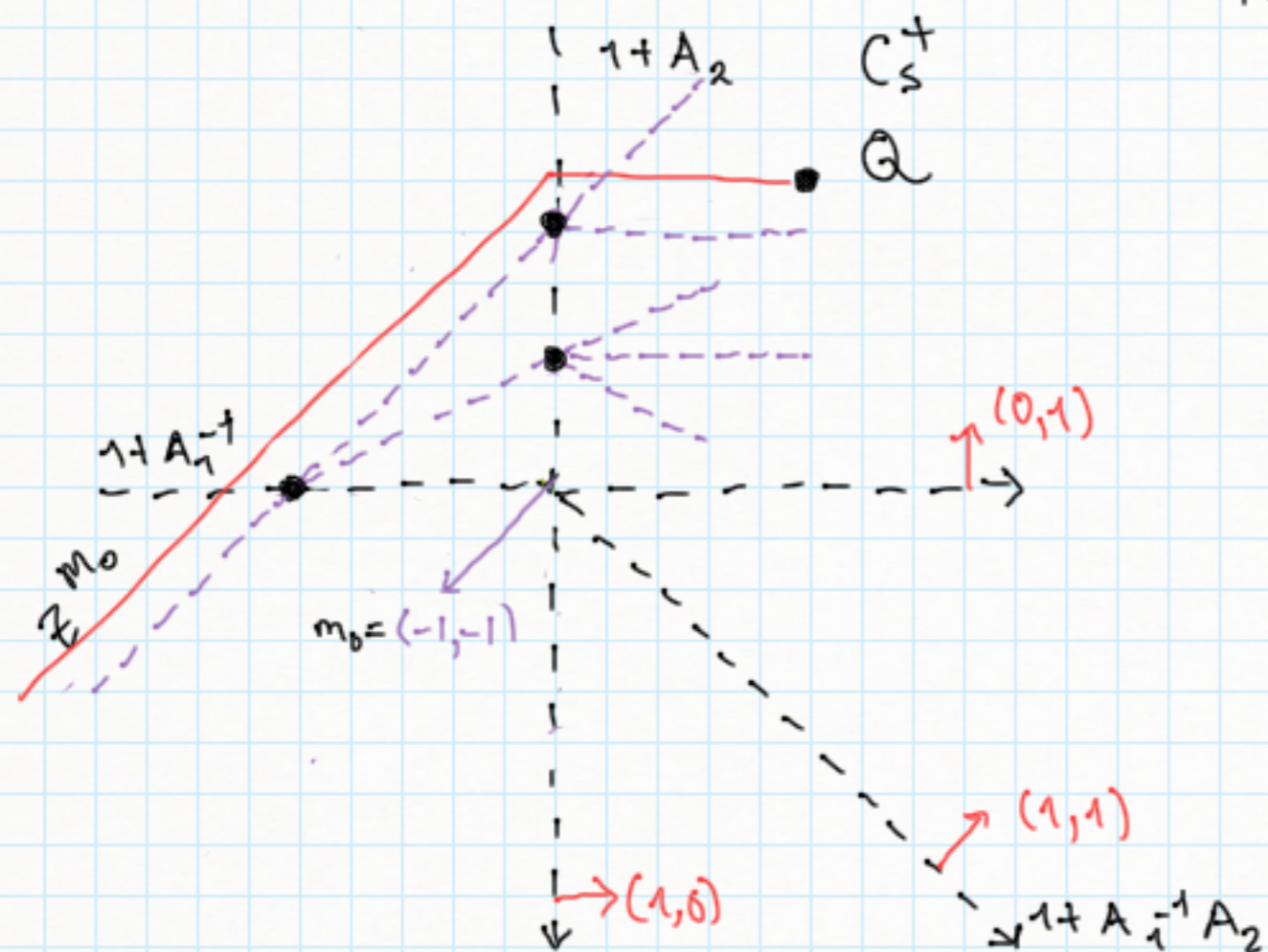
$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_{\text{in},s} \cup \{(\mathbb{R}_{20}(1, -1), 1 + A_1^{-1}A_2)\}$$

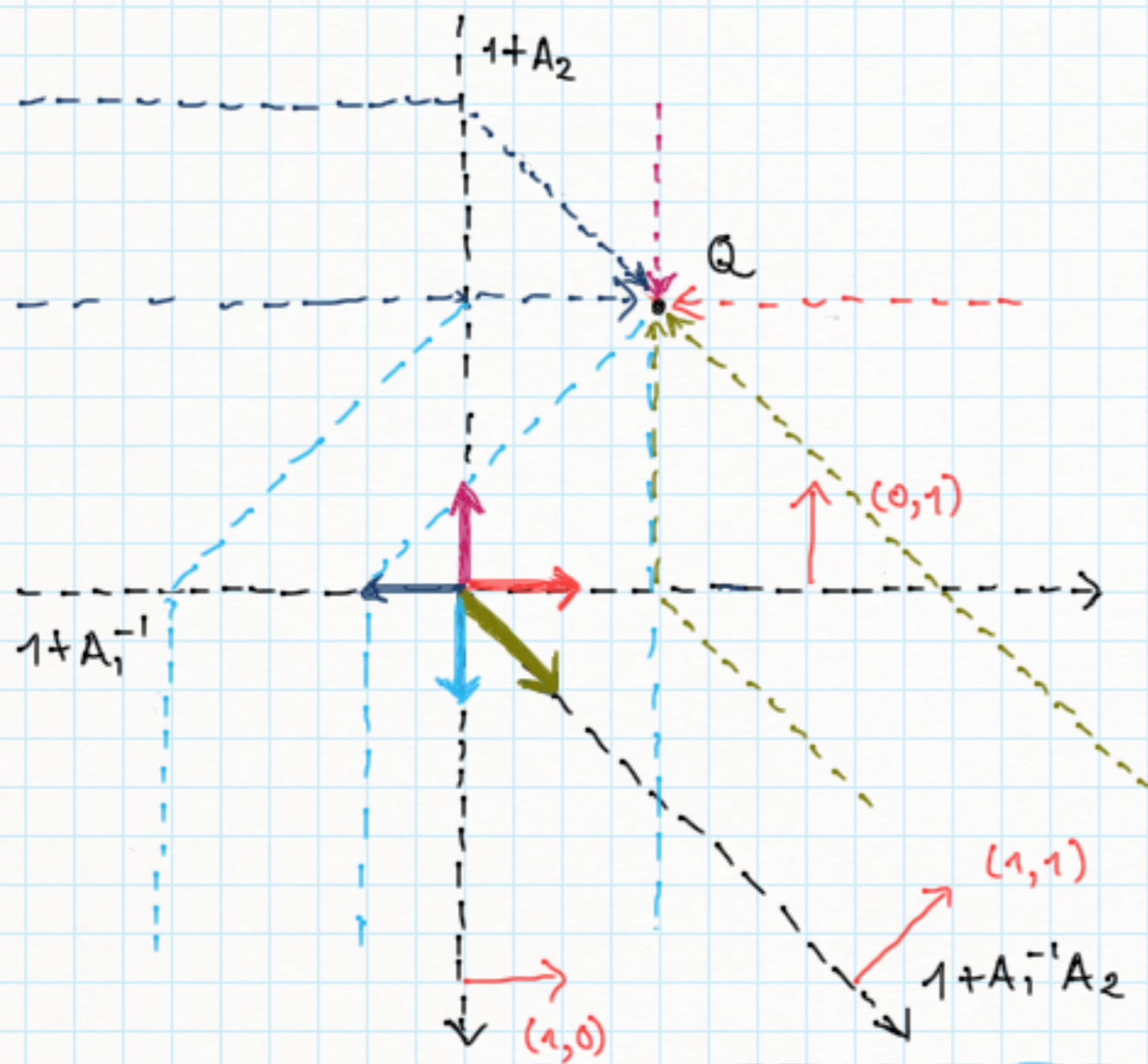
$$m_0 = (-1, -1)$$

$$z^{m_0} = A_1^{-1} A_2^{-1} (1 + A_1^{-1})^{-1} \langle (-1, -1), (0, 1) \rangle$$

$$= A_1^{-1} A_2^{-1} (1 + A_1^{-1}) = A_1^{-1} A_2^{-1} + A_1^{-2} A_2^{-1}$$

$$\begin{array}{cc} \Downarrow & \Downarrow \\ (-1, -1) & (-2, -1) \end{array}$$





$$\star m_0 = (1, 0)$$

$$\star m_0 = (0, 1)$$

$$\star m_0 = (-1, 0)$$

$$\star m_0 = (1, -1)$$

$$A_1^1 A_2^0 = A_1$$

$$A_1^0 A_2^1 = A_2$$

$$A_1^1 A_2^0 (1+A_2)^{-1} \langle (-1, 0), (1, 0) \rangle = A_1^{-1} (1+A_2) = \frac{1+A_2}{A_1}$$

$\downarrow$   
 $(-1, 0)$  y  $(-1, 1)$

$$A_1^1 A_2^{-1} (1+A_1)^{-1} \langle (1, -1), (0, 1) \rangle = A_1 A_2^{-1} (1+A_1^{-1}) = \frac{1+A_1}{A_2}$$

$\downarrow$   
 $(1, -1)$  y  $(0, -1)$

Variables de conglomerado  $A_2 : \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left\{ x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right\}$$

$$\hat{y}_1 = x_2, \quad \hat{y}_2 = 1/x_1$$

$$\star x_1 = x_1^1 x_2^0 (1)$$

$$\star x_2 = x_1^0 x_2^1 (1)$$

$$\star \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{1}{x_1} (1+x_2) = x_1^{-1} x_2^0 (1+\hat{y}_1)$$

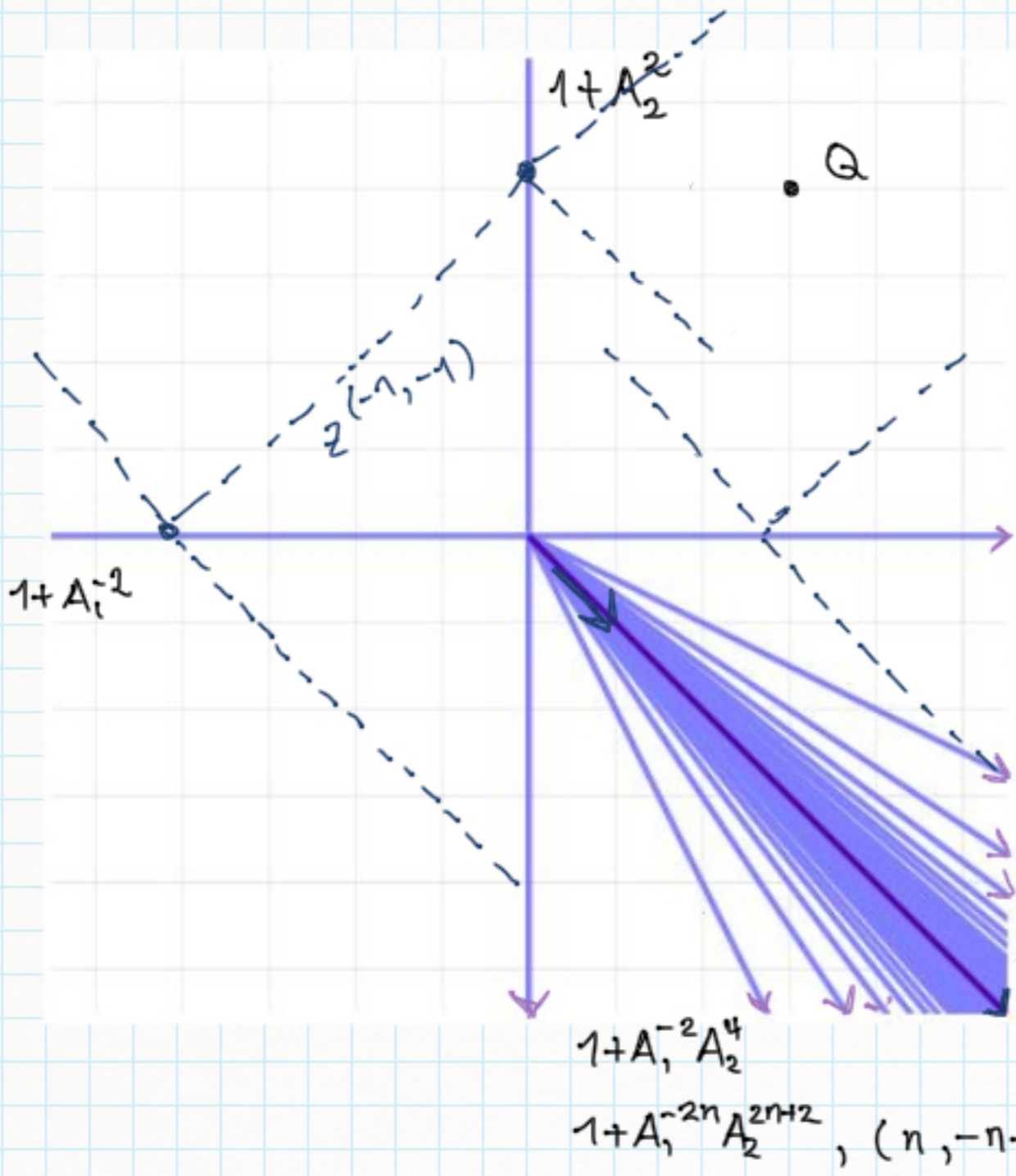
$$\star \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_2} \left( \frac{1}{x_1} + 1 + \frac{x_2}{x_1} \right)$$

$$= x_1^0 x_2^{-1} (1 + \hat{y}_2 + \hat{y}_1 \hat{y}_2)$$

$$\star \frac{1+x_1}{x_2} = \frac{x_1}{x_2} \left( 1 + \frac{1}{x_1} \right) = x_1^1 x_2^{-1} (1 + \hat{y}_2)$$

## Algunas observaciones / spoilers:

- \* Cada  $g$ -vector de  $A_2$  aparece como soporte de una pared.
- \* Cada cámara corresponde a una semilla de conglomerado.
- \* Se puede construir la variedad de conglomerado  $\mathcal{A}$  a partir del diagrama de difusión asociando un toro algebraico a cada cámara y pegando los toros por medio de los mapeos birracionales dados por los wall-crossings.
- \* Se puede expresar un monomio de conglomerado en términos del conglomerado inicial calculando  $\mathbf{P}_\gamma$  para un camino que va de un punto a la cámara positiva  $\mathcal{C}_+$ .

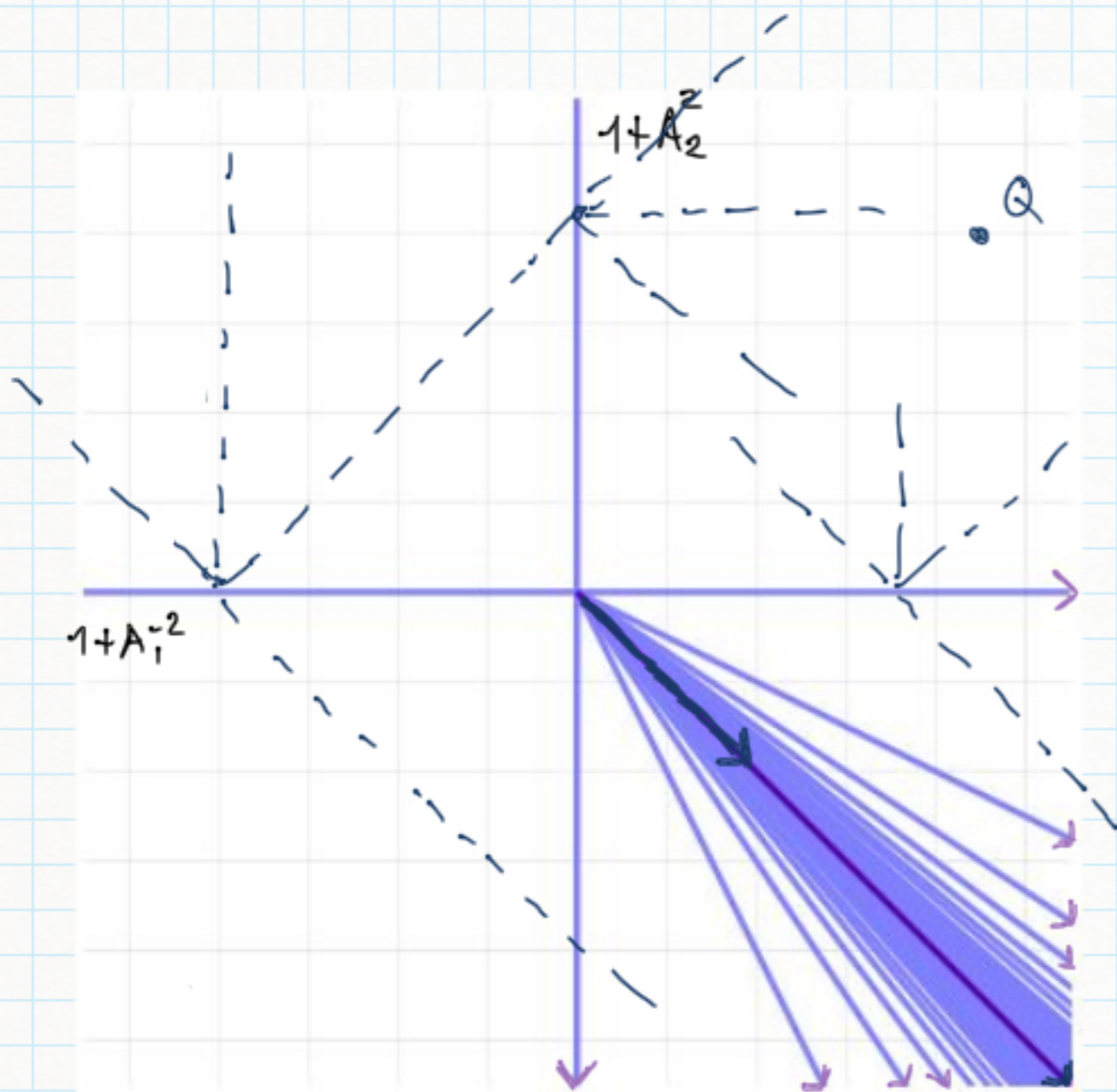


\*  $m_0 = (1, -1) \Rightarrow z^{m_0} = A_1 A_2^{-1}$   
 $A_1 A_2^{-1} (1 + A_1^{-2}) - \langle (1, -1), (0, 1) \rangle = A_1 A_2^{-1} (1 + A_1^{-2}) = A_1 A_2^{-1} + A_1^{-1} A_2^{-1}$   
 $(1, -1)$   $(-1, -1)$

\*  $m_0 = (-1, -1) \Rightarrow z^{m_0} = A_1^{-1} A_2^{-1}$   
 $A_1^{-1} A_2^{-1} (1 + A_2^2) - \langle (-1, -1), (1, 0) \rangle = A_1^{-1} A_2^{-1} (1 + A_2^2) = A_1^{-1} A_2^{-1} + A_1^{-1} A_2^1$   
 $(-1, -1)$   $(-1, 1)$

\*  $A_1^{-1} A_2^{-1} (1 + A_1^{-2n} A_2^{2n+2}) - \langle (-1, -1), (n+1, n) \rangle = A_1^{-1} A_2^{-1} (1 + A_1^{-2n} A_2^{2n+2})^{2n+1}$

$$\mathcal{D}_{Q, (1, -1)} = A_1^{-1} A_2 + A_1^{-1} A_2^{-1} + A_1 A_2^{-1}$$



$$\begin{aligned}
 * m_0 = (2, -2) &\Rightarrow z^{m_0} = A_1^2 A_2^{-2} \\
 A_1^2 A_2^{-2} (1 + A_1^{-2})^{-2} &= A_1^2 A_2^{-2} (1 + A_1^{-2})^2 \\
 &= A_1^2 A_2^{-2} + 2 A_1^{-2} + A_1^{-2} A_2^{-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * m_0 = (-2, -2) &\Rightarrow z^{m_0} = A_1^{-2} A_2^{-2} \\
 A_1^{-2} A_2^{-2} (1 + A_2^2)^{-2} &= A_1^{-2} A_2^{-2} (1 + A_2^2)^2 \\
 &= A_1^{-2} A_2^{-2} + 2 A_1^{-2} + A_1^{-2} A_2^2
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_{Q, (2, -2)} = A_1^2 A_2^{-2} + 2 A_2^{-2} + A_1^{-2} A_2^{-2} + A_1^{-2} A_2^2 + 2 A_1^{-2}$$

