Convexidad en términos de líneas quebradas
(con Mandy Cheung y Alfredo Nájera Chávez)

Recuerden - Dualidad de Fock-Goncharov y la conjetura de Fock-Goncharov completa:

- Las variedades de conglomerado se definen con datos Γ.
  Dado Γ, se construye el ensemble $(\mathcal{A}_\Gamma, \mathcal{X}_\Gamma)$.
- Tenemos una noción de dualidad de Langlands para Γ - la dual se escribe $\Gamma^\vee$.
- **Definición:** El **dual de Fock-Goncharov** de $\mathcal{A}_\Gamma$ es $\mathcal{X}_{\Gamma^\vee}$.
  El **dual de Fock-Goncharov** de $\mathcal{X}_\Gamma$ es $\mathcal{A}_{\Gamma^\vee}$.
- Dualidad de Langlands es una involución - $(\Gamma^\vee)^\vee = \Gamma$. $\rightsquigarrow$ Dualidad de Fock-Goncharov también.
- **Notación:** Sea $\mathcal{U}$ una variedad de conglomerado de cualquier tipo. Denote el dual de Fock-Goncharov de $\mathcal{U}$ como $\mathcal{U}^\vee$.
- **¿Porqué nos interesa?** - En casos buenos $(\mathcal{U}^\vee)^{\text{trop}}(\mathbb{Z})$ parametriza una base canónica de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ - la base de funciones ϑ. ← por recordar en unos minutos
  - Se parece caso particular de una conjetura de Gross-Hacking-Keel para la construcción del espejo de una variedad log Calabi-Yau afín con frontera maximal.
- **Funciones ϑ:** - Las funciones ϑ en $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ se construye utilizando un diagrama de dispersión $\mathfrak{D}^{\mathcal{U}} \subset (\mathcal{U}^\vee)^{\text{trop}}(\mathbb{R})$ y líneas quebradas $\gamma: (-\infty, 0] \longrightarrow (\mathcal{U}^\vee)^{\text{trop}}(\mathbb{R})$. La construcción hueristicamente está basada en la geometría logarítmica enumerativa de $\mathcal{U}^\vee$.
  - Sea $p \in (\mathcal{U}^\vee)^{\text{trop}}(\mathbb{Z})$, $x \in (\mathcal{U}^\vee)^{\text{trop}}(\mathbb{R})$ un punto base. $\vartheta_{p,x} = \sum_{\substack{\gamma \\ I(\gamma) = p \\ \gamma(0) = x}} c(\gamma) z^{F(\gamma)}$ ← monomio de decoración final de γ
  - **Definición:** $\Theta \subset (\mathcal{U}^\vee)^{\text{trop}}(\mathbb{Z})$ es el subconjunto tal que $\vartheta_{p,x}$ es una suma finita para cada x ($\Leftrightarrow$ una x) en el complejo de conglomerado Δ^+.
  - **Definición:** El álgebra generada por $\{\vartheta_p \mid p \in \Theta\}$ se denota **$\mathrm{mid}(\mathcal{U})$**.
  - A priori no tenemos que $\mathrm{mid}(\mathcal{U})$ sea subálgebra de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$. Lo que sí tenemos es un homomorfismo de algebras $\nu: \mathrm{mid}(\mathcal{U}) \to \mathcal{O}(\mathcal{U}) =: \mathrm{up}(\mathcal{U})$.

- **Los "casos buenos":** Se dice que **la conjetura de Fock-Goncharov completa se cumple para $\mathcal{U}$** si:
  - ν es biyectiva
  - $\Theta = (\mathcal{U}^\vee)^{\text{trop}}(\mathbb{Z})$.

  (En tal caso $\mathrm{mid}(\mathcal{U}) = \mathrm{up}(\mathcal{U})$.)

El caso tórico:
- $\mathcal{U} = T_N \cong N \otimes \mathbb{C}^*$, $\mathcal{U}^\vee = T_N^\vee = T_M = M \otimes \mathbb{C}^*$ $\quad M := \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$

  $T_N^{\text{trop}}(\mathbb{Z}) = N \leftrightarrow$ base de caracteres para $\mathcal{O}(T_M)$

  $T_M^{\text{trop}}(\mathbb{Z}) = M \leftrightarrow$ base de caracteres para $\mathcal{O}(T_N)$
- $T_N^{\text{trop}}(\mathbb{R}) = N_\mathbb{R}$, $T_M^{\text{trop}}(\mathbb{R}) = M_\mathbb{R}$

  Abanicos para variedades tóricas son ejemplos de diagramas de dispersión, pero cada función de dispersión es trivial $\rightsquigarrow$ no hay dispersión $\rightsquigarrow$ $\{\text{funciones } \vartheta\} = \{\text{caracteres}\}$

Construcción tórica:

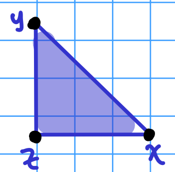
$$\left\{ \begin{matrix} \text{Politopos racionales} \\ \text{convexos} \quad P \subset M_{\mathbb{R}} \end{matrix} \right\} \leftrightsquigarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Variedades tóricas proyectivas} \\ \text{polarizadas} \quad \mathcal{L} \to Y, \quad T_N \subset Y \end{matrix} \right\}$$

$$dP \cap M \leftrightsquigarrow \text{Base de } \Gamma(Y, \mathcal{L}^{\otimes d})$$

Mejor: $C(P) \cap (M \oplus \mathbb{Z}) \leftrightsquigarrow$ Base graduada de $R_{\mathcal{L}} = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$, $R_d = \Gamma(Y, \mathcal{L}^{\otimes d})$

Ejemplo:

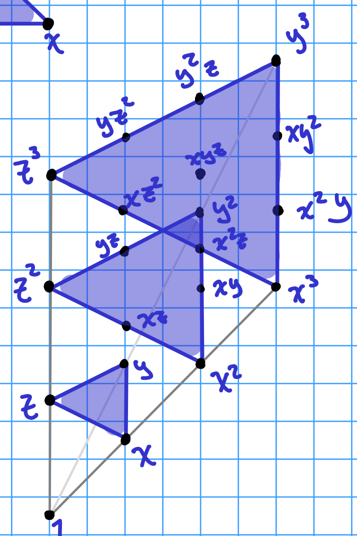
$P =$



Nivel d: base para $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$

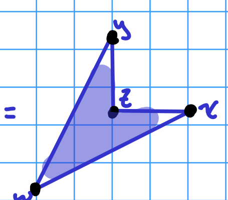
$$P \leftrightsquigarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$$

$C(P) =$



No ejemplo:

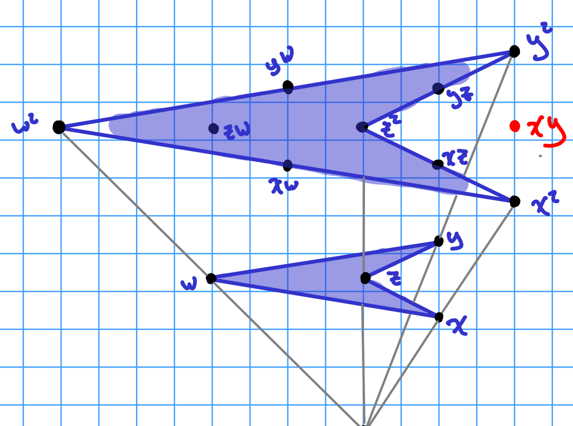
$P =$



$x, y \in P$

$xy \notin 2P$

$C(P) =$



$\Rightarrow$ Los puntos enteros en $C(P)$ no pueden codificar una base para un anillo graduado, como el anillo de secciones de un haz lineal.

Conclusión: ¡Convexidad es clave!

Pregunta: ¿Se puede construir modelos mínimos proyectivos polarizados para variedades de conglomerado de forma análoga?

Recuerden – Multiplicación de funciones ϑ:

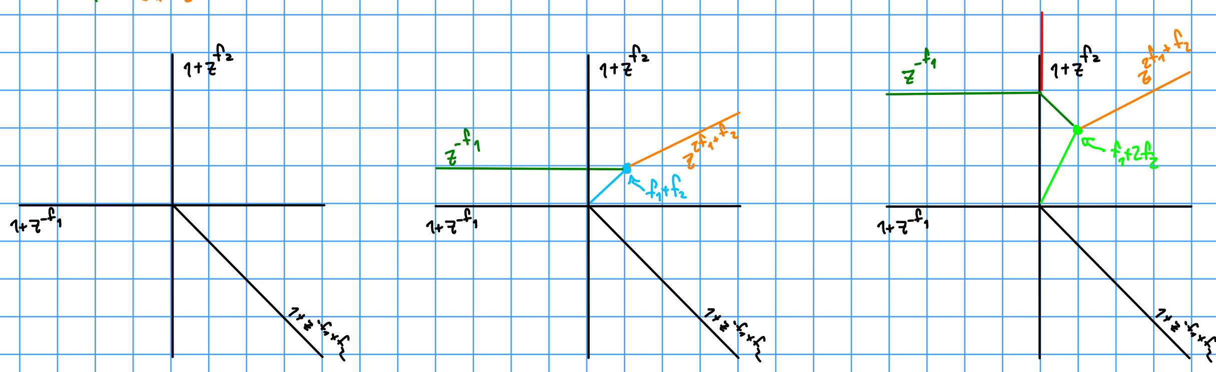
$$\vartheta_p\cdot\vartheta_q = \sum_{r\in(\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{Z})}\alpha^r_{p,q}\,\vartheta_r, \qquad \alpha^r_{p,q} = \sum_{\substack{(\gamma_1,\gamma_2)\\ I(\gamma_1)=p,\ I(\gamma_2)=q\\ \gamma_1(0)=\gamma_2(0)=r\\ F(\gamma_1)+F(\gamma_2)=r}} c(\gamma_1)\cdot c(\gamma_2)$$

← Cuenta de curvas tropicales con entradas p,q y salida r.

Ejemplo: $Q = \underset{1}{\bullet}\longrightarrow\underset{2}{\bullet}$, $\mathcal{U}=\mathcal{A}$

$\vartheta_{-f_1}\cdot\vartheta_{2f_1+f_2} = ??$

$\mathfrak{D}^{\mathcal{A}} =$



$$\Rightarrow\quad \vartheta_{-f_1}\cdot\vartheta_{2f_1+f_2} = \vartheta_{f_1+f_2}+\vartheta_{f_1+2f_2}$$

Diccionario parcial:

Variedades Tóricas	Modelos mínimos para variedades de conglomerado
$T_N\subset Y$	$\mathcal{U}\subset Y$
$M \rightsquigarrow$ base para $\mathcal{O}(T_N)$	$(\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{Z})\rightsquigarrow$ base para $\mathcal{O}(\mathcal{U})$
caracteres	funciones ϑ
productos de caracteres $\rightsquigarrow$ adición de vectores	productos de funciones $\vartheta\rightsquigarrow$ cuentas de curvas tropicales
$P\subset M_{\mathbb{R}}$ convexo	$S\subset(\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{R})$??
$\Rightarrow\ \mathcal{L}_P\to Y$	$\Rightarrow\ \mathcal{L}_S\to Y$
$C(P)\rightsquigarrow$ base graduada de $R_{\mathcal{L}_P}$	$C(S)\rightsquigarrow$ base graduada de $R_{\mathcal{L}_S}$

¿Hay una noción de convexidad en $(\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{R})$ que nos sirve acá?

Pregunta': ¿Para cuáles subconjuntos $S\subset(\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{R})$ tenemos que $C(S)\cap\left((\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}\right)$ define un anillo graduado en términos de funciones ϑ?

$=: C(S)(\mathbb{Z})$

Definición (GHKK - Def 8.6): Un subconjunto cerrado $S \subset (\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{R})$ es **positivo** si para cada $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p \in aS(\mathbb{Z})$, $q \in bS(\mathbb{Z})$, y $r \in (\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{Z})$ con $\alpha^r_{pq} \neq 0$, tenemos que:

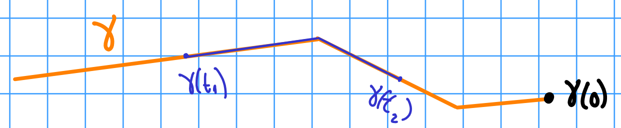
$$r \in (a+b)S.$$

Observación: Por definición el subconjunto cerrado $S \subset (\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{R})$ es positivo $\iff C(S)(\mathbb{Z})$ define un anillo graduado

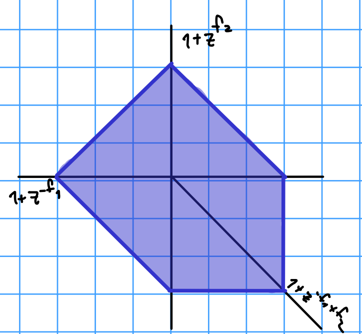
"Pregunta": ¿Cuales subconjuntos $S \subset (\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{R})$ son positivos?

Definición (Cheung, M, Nájera Chávez): Un subconjunto cerrado $S \subset (\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{R})$ es **convexo en terminos de lineas quebradas** si para cada $s_1, s_2 \in S(\mathbb{Q})$ cada "segmento quebrado" conectando s_1 y s_2 está completamente contenido en S.

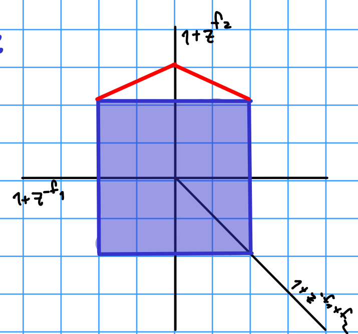
Segmento quebrado: Restricción de una linea quebrada $\gamma: (-\infty, 0] \to (\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{R})$ a un interval $[t_1, t_2]$.



Ejemplo:



No Ejemplo:



Teorema (Cheung, M, Nájera Chávez): El subconjunto cerrado $S \subset (\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{R})$ es positivo si y solo si S es convexo en terminos de lineas quebradas.

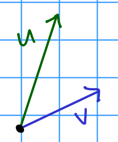
Idea de la prueba:

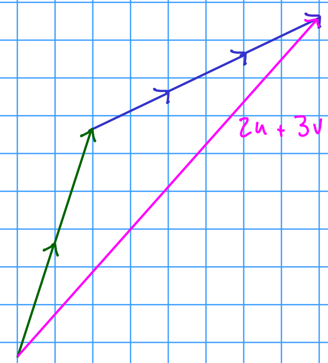
El problema - Funciones ϑ se parametrizan con **direcciones asintóticas** de lineas quebradas.
Convexidad en terminos de lineas quebradas se trata los **extremos** de segmentos quebrados

La resolución - Reinterpretar multiplicacion como medio ponderado (motivada por "jagged paths" de Gross-Siebert)
¿tal vez "caminos serrados"?

Caso tórico:

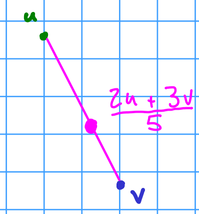
Adición normal



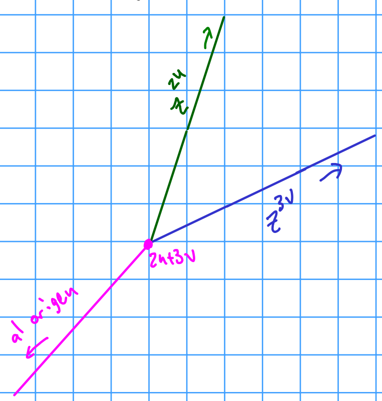


$z^{2u}\cdot z^{3v}=z^{2u+3v}$

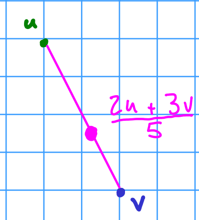
Medio ponderado



Líneas quebradas

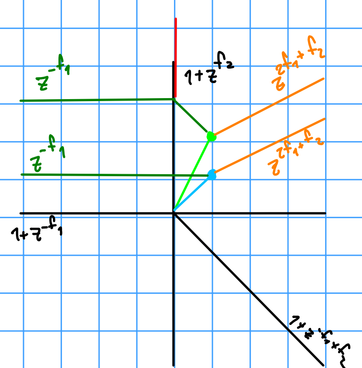


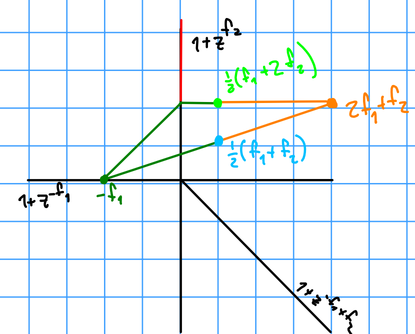
Segmentos quebrados



Caso de variedades de conglomerado:

$$\vartheta_{-f_1}\cdot\vartheta_{2f_1+f_2}=\vartheta_{f_1+f_2}+\vartheta_{f_1+2f_2}$$





Convexo en términos de líneas quebradas ⇒ positivo:

- Empiece con $a,b\in\mathbb{Z}_{>0}$, $p\in aS(\mathbb{Z})$, $q\in bS(\mathbb{Z})$, y $r\in(\mathcal{U}^\vee)^{trop}(\mathbb{Z})$ con $\alpha^r_{p,q}\neq 0$.
- Elige (γ_1,γ_2) contribuyendo a $\alpha^r_{p,q}$.
- Utilizando (γ_1,γ_2), construye un segmento quebrado $\tilde\gamma$ conectando $\frac{p}{a}\in S(\mathbb{Q})$ con $\frac{q}{b}\in S(\mathbb{Q})$, y pasando por $\frac{r}{a+b}$.
- S convexo en términos de líneas quebradas ⇒ $\frac{r}{a+b}\in S$, y $r\in(a+b)S$.

Positivo ⇒ Convexo en términos de líneas quebradas:

- Similar, pero empiece con el segmento quebrado y construye (γ_1,γ_2).

Más aplicaciones de convexidad en terminos de lineas quebradas: (+ Lara y Bosco)

- **Cuerpos de Newton-Okounkov**

–La noción usual:
- X una variedad de dim. d.
- D un divisor en X
- R_D el anillo de secciones de D

$$R_D := \bigoplus_{j\ge 0} R_j, \quad R_j = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(jD))$$

(3 entradas geométricas)

- $\nu: R_D\setminus\{0\} \to \mathbb{Z}^d$ una valuación ← 1 entrada auxiliar

Definición: El cuerpo de Newton-Okounkov $\Delta_\nu(D)$ es $\Delta_\nu(D) := \overline{\mathrm{conv}\left(\bigcup_{j\ge1} \frac{1}{j}\nu(R_j)\right)}$.

–Una versión intrínsica:
- $U\subset X$ un modelo mínimo parcial
- D un divisor de la frontera en X
- R_D el anillo de secciones de D

(3 entradas geométricas, pero con el contexto restringido)

Definición: La analogía del politopo de Newton para funciones ϑ es

$$\mathrm{Newt}_\vartheta\Big(\sum_{p\in (U^\vee)^{trop}(\mathbb{Z})} a_p\vartheta_p\Big) = \mathrm{conv}_{BL}\{p : a_p\neq 0\}.$$

← envolvente convexa en terminos de lineas quebradas

Definición: El cuerpo de Newton-Okounkov intrínseco es

$$\Delta_{BL}(D) := \overline{\mathrm{conv}_{BL}\Big(\bigcup_{j\ge1}\Big(\bigcup_{f\in R_j}\frac{1}{j}\mathrm{Newt}_\vartheta(f)\Big)\Big)}.$$

- Al elegir una carta tórica T_s en U se obtiene una identificación de $\Delta_{BL}(D)$ con un cuerpo NO usual $\Delta_{\nu_s}(D)$.
- En muchos casos la cerradura no es necesario – existe $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\Delta_{BL}(D) = \mathrm{conv}_{BL}\Big(\bigcup_{j=1}^{k}\Big(\bigcup_{f\in R_j}\frac{1}{j}\mathrm{Newt}_\vartheta(f)\Big)\Big)$.

  Sea k el mínimo posible. Suele pasar para $\Delta_\nu(D)$ también.

  Sea $k_s\in\mathbb{Z}_{>0}$ el mínimo tal que $\Delta_{\nu_s}(D) = \mathrm{conv}\Big(\bigcup_{j=1}^{k_s}\frac{1}{j}\nu_s(R_j)\Big)$.

  Tenemos que $k\le k_s$ para cada semilla s.
- **Ejemplo:** $Gr_k(\mathbb{C}^n)$. $D=$ pullback de hiperplano.

  $$\Delta_{BL}(D) = \mathrm{conv}_{BL}\Big\{\nu \mid \vartheta_\nu = p_J,\ J\in\binom{[n]}{k}\Big\}.$$

- **Generalizaciones de más construcciones tóricas** – La convexidad aparece por todos lados en geometría tórica, en construcciones tanto como pruebas. Otra construcción importante: abanicos se utilizan para describir variedades tóricas con un atlas. Se puede traducir esa construcción al mundo de modelos mínimos parciales para variedades de conglomerado.

  Ingredientes importantes:
  - $\langle\cdot,\cdot\rangle: U^{trop}(\mathbb{Z})\times(U^\vee)^{trop}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ (emparejamiento tropical)

    $(\nu, p) \mapsto \nu(\vartheta_p)$
  - Dado $C\subset U^{trop}(\mathbb{Z})$, se define $C^\vee := \{p\in (U^\vee)^{trop}(\mathbb{R}) : \langle c,p\rangle\ge 0\ \forall c\in C\}$
  - **Prop:** $C^\vee$ siempre es un subconjunto convexo en terminos de lineas quebradas
- **Pregunta:** una variedad tórica proyectiva se puede describir con un politopo ó un abanico. Ambas construcciones se generalizan, y también la noción de "politopo normal". **¿Nos dan la misma variedad en el mundo de modelos mínimos de variedades de conglomerado?**
- **Generalización de Dualidad de Batyrev / Batyrev-Borisov** – El santo grial de nuestro programa de investigación.