La tropicalización de las variedades de conglomerado

Seminario

Basado en [§2. GHKK]

Previamente habíamos visto que la tropicalización de variedades de conglomerado estuvo motivada por la conjetura de Fock y Goncharov.

Más adelante veremos las formas de tropicalización asociadas

Semicampos

- Un semicampo cumple con los axiomas de campo, salvo el de contar con inversos aditivos $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$.

- El semicampo tropical: Sea $(\mathbb{P}, \cdot)$ un grupo abeliano libre generado por las variables $p_1, \ldots, p_n$, con adición $\oplus$, dada por

$$\prod_j p_j^{a_j} \oplus \prod_j p_j^{b_j} = \prod_j p_j^{\min\{a_j, b_j\}}$$

e.g. $p_1^3 p_2^{-3} \oplus 1 = p_2^{-3}$

denotado por $\mathrm{Trop}(p_1, \ldots, p_n)$

- Consideremos $\mathbb{P} = \mathrm{Trop}(p_1, \cdots, p_n)$
- Por $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ denotamos al anillo del grupo $\mathbb{P}$, i.e $\mathbb{Z}\mathbb{P} = \mathbb{Z}[\mathbb{P}]$, en otras palabras, $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ es el anillo de polinómios de Laurent en las variables $p_1, \cdots, p_n$.
- $\mathbb{Q}\mathbb{P}$ denota al campo de fracciones de $\mathbb{Z}\mathbb{P}$.

– Un semicampo a tener en cuenta, es el semicampo universal:

$$\mathbb{Q}_{sf}(x_1, \cdots, x_n) = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{Q}_{sf}(x_1, \cdots, x_n) \,\middle|\, \exists f', g' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[x_1, \cdots, x_n] \right.$$

$$\left. \text{tal que } \frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \right\}$$

obs: No siempre es visible ver si un elemento pertenece a $\mathbb{Q}_{sf}$: e.g. $x^2 - x + 1 \in \mathbb{Q}_{sf}$ pues $x^2 - x + 1 = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$

- **Propiedad Universal de $\mathbb{Q}_{sf}$:**

Si $\mathbb{P}$ es un semicampo, y $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}$, entonces existe un único homomorfismo de semicampos $\mathbb{Q}_{sf}(x_1, \dots, x_n) \to \mathbb{P}$, con $x_i \mapsto p_i$

Tropicalización de variedades de conglomerado

2 Formas de tropicalización

Tropicalización de Fock & Goncharov, la cual considera la estructura de esquema positivo de las variedades de conglomerado.

Tropicalización geométrica (GHK) Considera valuaciones divisoriales discretas y se hace uso de la estructura de variedad log C-Y.

Sobre la tropicalización geométrica:

Sea U una variedad algebraica (en $\mathbb{C}$), suave, con una forma de volumen sin ceros ni polos, entonces es log-CY. Eg: $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$, posteriormente, como habíamos visto sería pegar toros de tal modo que se preserve esta forma de volúmen.

Recordemos $\mathcal{A} = \bigcup_{s \in S} T_N$

La idea es que $\mathcal{A}$ es log C-Y porque las mutaciones preservan la forma de volúmen.

- Sea $\mathcal{V}$ una variedad de conglomerado, entonces

$$\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{Z}) = \{\text{valuaciones divisoriales disc. } v: \mathbb{C}(\mathcal{V})^* \longrightarrow \mathbb{Z} \mid v(\omega) < 0\}$$

donde ω es la forma de volúmen.

Recordemos como son los puntos tropicales (o $\mathbb{P}$-racionales) de un toro T_N asociado a una latiz N (Con latiz dual $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$).

- El semicampo asociado al toro es $\mathbb{Q}_{sf}(T_N)$ (ó simplemente denotado por $\mathbb{Q}_{sf}(N)$): Cocientes de polinómios de Laurent con coeficientes en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

- En general, para cualquier semicampo $\mathbb{P}$ si nos restringimos a los monomios $M \subset \mathbb{Q}_{sf}(N)$, obtenemos una biyección

$$\mathrm{Hom}_{sf}(\mathbb{Q}_{sf}(N), \mathbb{P}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{gr}(M, \mathbb{P}^{\times}) = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^{\times}$$

donde $\mathbb{P}^{\times}$ es el grupo mult.

- Los puntos $\mathbb{P}$-racionales son: $T_N(\mathbb{P}) = \mathrm{Hom}_{sf}(\mathbb{Q}_{sf}(N), \mathbb{P})$

2 estructuras de semianillo asociadas a $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}^T = (\mathbb{Z}, \text{máx}, +)$

- Forma de la tropicalización de Fock & Goncharov.

$\mathbb{Z}^t = (\mathbb{Z}, \min, +)$

- Forma de la tropicalización geométrica.

- Un mapeo birracional positivo

$$\mu : T_N \dashrightarrow T_N$$

es un mapeo birracional tal que el pull back μ^* induce un isomorfismo en $\mathbb{Q}_{sf}(N)$.

- A su vez esto induce un isomorfismo entre los puntos tropicales.

Dado un mapeo birracional positivo $\mu : T_N \dashrightarrow T_N$ escribimos los mapeos inducidos como:

$$\mu^T : N \to N \qquad\qquad \mu^t : N \to N$$

indica → $T_N(\mathbb{Z}^T) \to T_N(\mathbb{Z}^T)$ $\qquad T_N(\mathbb{Z}^t) \to T_N(\mathbb{Z}^t)$.

Observación: Notemos que podemos definir un isomorfismo de semicampos: $\mathbb{Z}^T \to \mathbb{Z}^t \quad x \mapsto -x$ el cual induce una identificación $i : X(\mathbb{Z}^T) \to X(\mathbb{Z}^t)$ como conjuntos. Además $T_N(\mathbb{Z}^{T\,o\,t}) = N$ (lema 1.8 GHK)

Ahora queremos enfocarnos en los mapeos birracionales que definen la mutación:

$$\mu_k : T_N \dashrightarrow T_N \qquad\qquad \mu_k^*(z^{m'}) = z^m (1 + z^m)^{\langle m', n \rangle}$$

Del mapeo anterior se inducen:

- Tropicalización de Fock & Goncharov:

$$\mu^T : T_N(\mathbb{Z}^T) = N \longrightarrow T_N(\mathbb{Z}^T) = N$$

$$x \longmapsto x + [\langle m, x \rangle]_+ n \qquad [x]_+ = \text{máx}\{0, x\}$$

- Tropicalización geométrica:

$$\mu^t : T_N(\mathbb{Z}^t) = N \longrightarrow T_N(\mathbb{Z}^t) = N$$

$$x \longmapsto x + [\langle m, x \rangle]_- n \qquad [x]_- = \min\{0, x\}$$

Por medio de estos mapeos podemos hablar la tropicalización de una variedad de conglomerado $V(\mathbb{P})$, pues los mapeos son positivos.

- En forma análoga se puede definir $\mathbb{R}^T$ y $\mathbb{R}^t$, al igual que $T_N(\mathbb{R}^t)$ y $T_N(\mathbb{R}^T)$, los cuales tienen identificación con $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$.

Observemos que dadas las inclusiones $T_N \hookrightarrow \mathcal{A}$

$T_M \hookrightarrow \mathcal{X}$

se inducen biyecciones entre los $\mathbb{P}$ puntos:

Asumiendo

$N \cong \mathbb{Z}^n$

$N = N^0 = N_{mut}$

$$T_{N^0}(\mathbb{P}) \cong \mathcal{A}(\mathbb{P}) \quad y \quad T_M(\mathbb{P}) \cong \mathcal{X}(\mathbb{P})$$

Además, dada la identificación $T_N(\mathbb{Z}^T) = N$

entonces $\mathcal{A}(\mathbb{Z}^T) = \mathcal{X}(\mathbb{Z}^T) = N.$

- Se recalta el hecho de que a nivel de campos se mantiene la inclusión, pero en semicampos existe una biyección.

Una función racional f en una variedad de conglomerado V es positiva si su restricción a cada semilla para cada toro puede ser expresada como cociente de sumas de caracteres con coeficientes positivos.

Entonces, podemos definir su tropicalización

- Fy: $f^T : V(\mathbb{R}^T) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f^T(p) = -p(f)$$

- Geométrica: $f^t : V(\mathbb{R}^t) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f^t(p) = p(f)$$

En este sentido p es interpretado como una valuación, donde $p(f)$ es el valor de v en f. Más aún, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V(\mathbb{R}^T) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f^T"'] & V(\mathbb{R}^t) \arrow[d, "f^t"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

donde i es el isomorfismo canónico determinado por el isomorfismo de cambio de signo.

- Notemos lo siguiente

$$(z^m)^T(a) = \langle m, -r(a) \rangle, \quad m \in M, \quad a \in T_N(\mathbb{Z}^T)$$

$$(z^m)^t(a) = \langle m, r(a) \rangle, \quad m \in M, \quad a \in T_N(\mathbb{Z}^t)$$

y $$(z^m)^T(a) = (z^m)^t(i(a))$$

donde r es la reestricción para obtener los $\mathbb{P}$-puntos

$$r : T_N(\mathbb{P}) = \mathrm{Hom}_{st}(\mathbb{Q}_{st}(N), \mathbb{P}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_g(M, \mathbb{P}^\times) = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^\times$$

Consideremos una semilla $s_v = (e_{1,v}, e_{2,v}, \dots, e_{n,v})$ en N con base dual $s_v^* = (f_{1,v}, \dots, f_{n,v})$ en M, y consideremos un mapeo $\mu_{0,v}^T : M \longrightarrow M$ (recordando que es composición acorde a Π_s).
Denotemos al ortante positivo de M por $\mathcal{C}_v^+$, entonces tenemos uno de los resultados principales del artículo:

Teorema (Theorem 2.13 [GHKK])
Si definimos $\mathcal{G}_v^+ = (\mu_v^T)^{-1}(\mathcal{C}_v^+)$, entonces

$$\bigcup_{v \in \Pi_s} (\mathcal{G}_v^+) \quad \text{es un abanico simplicial en } M_{\mathbb{R}}$$

//

donde Π_s es el árbol n-regular orientado

En realidad, el resultado es más general. Recordemos el diagrama

$$\mathfrak{D}_s = \{ (e_i^{\perp}, 1+z^{v_k}) \mid i \in I_{mut} \}$$

$v_k = \{e_k, i\} \in M^\circ$ con datos fijos Γ.

Entonces el soporte de $\mathfrak{D}_s \subset A^\vee(\mathbb{R}^T)$

- Dados Γ y una semilla inicial $s' = (e'_1, \dots, e'_n)$ obtenida bajo mutación de la semilla inicial, se define la cámara cluster de Fock y Goncharov asociada a s'

$$\{ x \in A^\vee(\mathbb{R}^T) \mid (z^{e'_i})^T(x) \leq 0 \text{ para } i \in I_{mut} \}$$

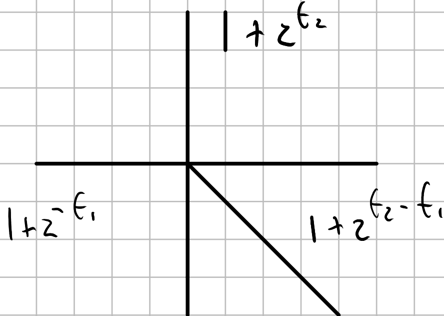
identificada con $\{ x \in A^\vee(\mathbb{R}^t) \mid (z^{e_i})^t(x) \leq 0 \text{ para } i \in I_{mut} \}$

El complejo de conglomerado de Fock y Goncharov Δ^+ es el conjunto de dichas cámaras.

Teorema (Teorema 2.13 [GHKK])

Para cualquier semilla inicial, las camaras de conglomerado de FG en $\mathcal{A}^\vee(\mathbb{R}^T)$ son los conos maximales de un abanico simplicial.

- Recordemos el ejemplo con $N=\mathbb{Z}^2=N^0=N_{mut}$, $d_1=d_2=1$ con forma $N\times N\to\mathbb{Q}$ dada por $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, y semilla inicial $s=(e_1,e_2)$ con dual $s^*=(f_1,f_2)$



$M_{\mathbb{R}}=\mathcal{X}(\mathbb{R}^t)$.