Tarea de Álgebras de Conglomerado

EJERCICIO 1.8

Consideremos un pentágono $ABCDE$ con aristas de longitud uno inscrito en una circunferencia y dos diagonales con longitudes x_1 y x_2 como se muestra en la figura 1.

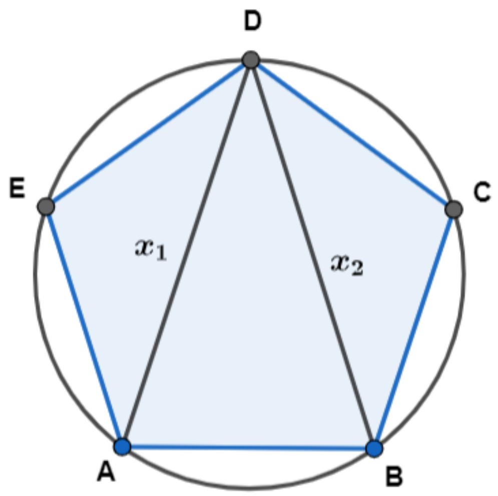

Figura 1

Ahora trazamos la diagonal de color rojo con longitud x_3, como se muestra en la figura 2.

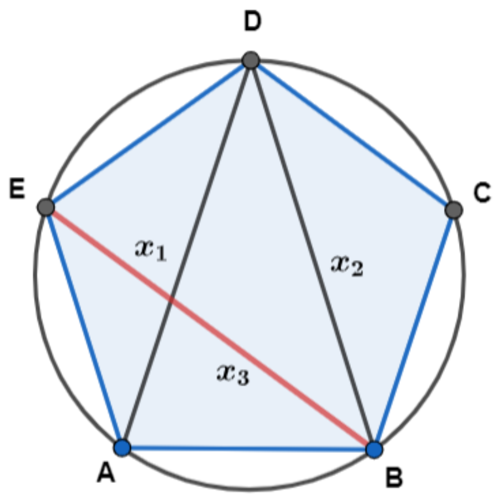

Figura 2

Aplicando el teorema de Ptolomeo al cuadrilatero $ABDE$, obtenemos que:

$$x_3 * x_1 = 1 * 1 + x_2 * 1,$$

y despejando x_3, llegamos a que:

$$x_3 = \frac{1 + x_2}{x_1},$$

la cual coincide con la regla de friso dada en el ejemplo 1.4 de la clase. Similarmente, ahora si agregamos una diagonal de longitud de x_4 de color verde, como se muestra en la figura 3, al aplicar el teorema de Ptolomeo al cuadrilatero $ABCD$, llegamos a que:

$$x_4 * x_2 = x_3 * 1 + 1 * 1,$$

por lo que, obtenemos la siguiente ecuación despejada para x_4:

$$x_4 = \frac{1 + x_3}{x_2},$$

la cual nuevamente, coincide con la del ejemplo 1.4.

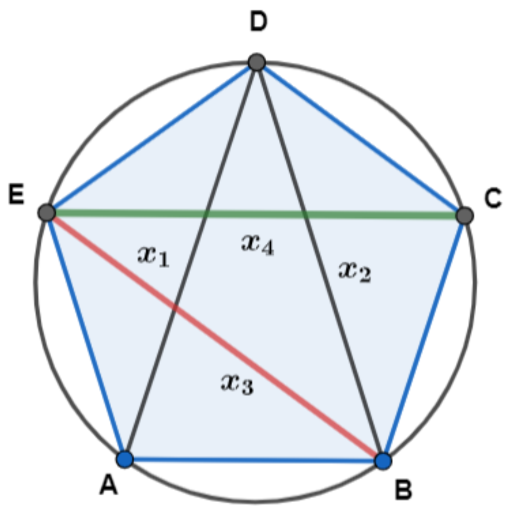

Figura 3

Finalmente, si agregamos la diagonal con longitud x_5 trazada de color púrpura en la figura 4, y si aplicamos el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero $ABCE$, obtenemos que:

$$x_3 * x_5 = x_4 * 1 + 1 * 1,$$

despejando x_5, obtenemos otra vez una expresión igual a la del ejemplo 1.4:

$$x_5 = \frac{1 + x_4}{x_3}.$$

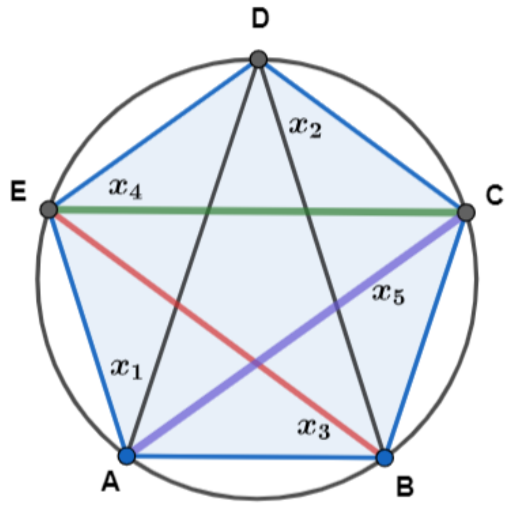

Figura 4

EJERCICIO 1.10

Consideremos primero la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sus menores son todas sus entradas y su determinante:

$$2, 1, 1, 1 \text{ y } 1.$$

Como todos son positivos, entonces la matriz es totalmente positiva. Hay cuatro menores de submatrices de tamaño 1×1 y uno de 2×2.

Similarmente, en la otra matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

notamos que el determinante de la submatriz formada por las filas 2 y 3, junto con las columnas 1 y 2, es negativo, por lo tanto esta matriz no es ni totalmente positiva ni totalmente no negativa. Hay nueve menores de submatrices de tamaño 1×1, nueve de 2×2 y uno de 3×3.

Por último, en la otra matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

todos los menores son mayores o iguales a cero, por lo que la matriz es totalmente no negativa. Hay dieciseis menores de submatrices de tamaño 1×1, treinta y seis de 2×2, diciseis de 3×3 y uno de 4×4.

En una matriz de $n \times n$, podemos formar $\binom{n}{k}^2$ sumatrices de tamaño $k \times k$. Por lo que, en total, una matriz de $n \times n$ tiene

$$\binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$$

menores.

EJERCICIO 1.13

En general, no es cierto que el producto de dos matrices totalmente positivas es totalmente positiva. Veamos el siguiente contraejemplo.

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix},$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Muchas gracias por este ejemplo Damian, de hecho en el coroloario falta que m<=n. Si ves la formula de Cauchy Binet, para m>n no tiene sentido. Entonces tal el Teorema 1.11 como el Corolario 1.12 necesitan m<=n.

Y así aplica para BA=(6 22\\ 22 116) con determinante positiva

Ambas son totalmente positivas, sin embargo su producto AB, no lo es:

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & 26 & 34 \\ 26 & 37 & 49 \\ 34 & 49 & 65 \end{pmatrix},$$

pues su determinante es cero.

EJERCICIO 1.18

1. Los menores maximales de A son $p_{12} = 1$, $p_{13} = 1$ y $p_{23} = 1$. Por otra parte, la matriz BA es:
$$\begin{pmatrix} a & b & b-a \\ c & d & d-c \end{pmatrix},$$
por lo que, sus menores maximales son: $p_{12} = ad - bc$, $p_{13} = ad - bc$ y $p_{23} = ad - bc$. Es decir, los menores de BA son todos iguales al determinante de B.

2. Como A_V representa un elemento de la grassmanniana $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^n)$, entonces es una matriz que consiste en dos filas linealmente independientes, por lo que al menos uno de sus menores maximales es distinto de cero. Supongamos que estas dos filas son α_1 y α_2.

   Si B es una matriz invertible, entonces tiene determinante no nulo, por lo que, BA_V también tiene al menos un menor distinto de cero, asi que las filas de BA_V también son linealmente independientes, supongamos que estas filas son β_1 y β_2.

   Consideremos que la matriz B tiene la forma:
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
   entonces, es fácil notar, al hacer la multiplicación de matrices que
$$\alpha_1 = a\beta_1 + b\beta_2,$$
$$\alpha_2 = c\beta_1 + d\beta_2.$$
   Lo que demuestra que β_1 y β_2 también generan a V, por lo tanto forman una base y concluimos que BA_V también representa a V. Por el corolario 1.12 podemos afirmar que la condición de que B tenga determinante positivo es necesario para que BA_V tenga todos sus menores maximales positivos, dado que A_V tiene todos sus menores maximales positivos.

EJERCICIO 1.21

Supongamos que la $i-$ésima columna de la matriz es:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$j-$ésima columna es:

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

$k-$ésima columna es:

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

y la $l-$ésima columna de la matriz es:

$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}.$$

Entonces, $p_{ij} = ad - bc$, $p_{kl} = eh - fg$, $p_{il} = ah - bg$, $p_{jk} = cf - de$, por lo que:

$$p_{ij}p_{kl} - p_{il}p_{jk} = acfh - ebch + ebgd - afgd = (af - eb)(ch - gd),$$

lo cual, en efecto, es $p_{ik}p_{jl}$.