Ejercicio 1.10 Sean las matrices. Ver cuáles son TP.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sólo la primera es totalmente positiva, con menores $2, 1$, de la segunda el menor $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no cumple, y de la tercera el menor $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no cumple.

¿Cuántos menores tiene una matriz $n \times n$?

Hay $\binom{n}{k}$ secuencias $\mathbf{i} = (1 \leq i_2 < \cdots < i_k < n)$ de tamaño k

y de igual forma para secuencias $\mathbf{j} = (1 < j_1 < \cdots < j_k < n)$

Es decir, hay $\binom{n}{k}\binom{n}{k}$ menores de submatrices de tamaño $k \times k$

entonces en total hay $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{i}$ menores.

Corolario 1.12. Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Si A, B son TP entonces $C = AB$ es totalmente positiva. $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Demostración

Denotemos a las matrices por

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,m} \end{pmatrix}$$

Tomemos 2 secuencias $\mathbb{i} = (1 \leq i_1 < \cdots < i_p < m)$

$\mathbb{j} = (1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq m)$

Luego, notemos que la matriz cuadrada de C dada por $\mathbb{i}$ y $\mathbb{j}$ es

$$C[\mathbb{i}, \mathbb{j}] = \begin{pmatrix} c_{i_1, j_1} & \cdots & c_{i_1, j_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i_p, j_1} & \cdots & c_{i_p, j_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_1, 1} & \cdots & a_{i_1, n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p, 1} & \cdots & a_{i_p, n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1, j_1} & \cdots & b_{1, j_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n, j_1} & \cdots & b_{n, j_p} \end{pmatrix}$$

Es decir, $C[\mathbb{i}, \mathbb{j}]$ es la submatriz obtenida de submatrices A' y B' de tamaño $p \times n$ y $n \times p$ de A y B respectivamente.

Por lo tanto, por el teorema de Cauchy-Binet

$$C(\mathbb{i}, \mathbb{j}) = \det(C[\mathbb{i}, \mathbb{j}]) = \sum_{\mathbb{K} \in \binom{[n]}{p}} A'([p], \mathbb{K}) B'(\mathbb{K}, [p]) > 0$$

y como el menor $C(\mathbb{i}, \mathbb{j})$ fué arbitrario entonces C es TP ∎

Escaneado con CamScanner

Ejercicio 2.6 Prueba que la mutación de un carcaj es una involución i.e $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$

Demostración

Si en Q hay un camino $i \to k \to j$, en $\mu_k(Q)$ agregamos una flecha $i \to j$ y revertimos las adyacentes a k, i.e obtenemos
$$\begin{tikzcd} i & k \arrow[l] & j \arrow[l] \arrow[ll, bend right, to=1-1, leftarrow] \end{tikzcd}$$
en $\mu_k(Q)$. luego, al mutar nuevamente, dado que hay 1 camino $j \to k \to i$, agregamos una flecha $j \to i$, y revertimos las flechas adyacentes a k entonces obtenemos
$$\begin{tikzcd} i \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & k \arrow[r] & j \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$
, pero de las 2 mutaciones se formó un 2 ciclo orientado $i \to j \to i$, y entonces lo eliminamos, quedando así el camino original $i \to k \to j$ ∎

Ejercicio 2.8 - Sea Q un carcaj y sean k y l dos vértices de Q sin flechas entre ellos. Mostrar que
$$\mu_k(\mu_l(Q)) = \mu_l(\mu_k(Q)).$$

Demostración:

Dado que la mutación de un carcaj en un vértice sólo modifica las direcciones, agrega flechas o elimina ciclos entre el vértice mutable y sus vértices vecinos, entonces sólo es de interés el caso en que k y l tengan vértices en común, los cuáles asumimos no son congelados, pues no tendrían flechas entre sí.

Entonces, supongamos que x, y son vecinos de k y l.

Si hay un camino $x \to k \to y$, al hacer la mutación con respecto a k se añade una flecha $x \to y$ y se revierten los adyacentes a k.

Supongamos ahora que hay un camino $x \to l \to y$, entonces al mutar con respecto a l se añade una flecha $x \to y$ y se revierten los adyacentes a l, entonces en $\mu_k(\mu_l(Q))$ o $\mu_l(\mu_k(Q))$ queda la misma mutación.

De forma similar se observa lo mismo si en Q hay un camino $y \to k \to x$, $y \to l \to x$, o si k y l son sólo pozos o fuentes con respecto a y y x. $\blacksquare$

Corolario 2.21. Sean Q y Q' dos orientaciones del mismo árbol. Entonces Q se obtiene de Q' de una secuencia de mutaciones en pozos y fuentes.

Demostración:

Procedemos por inducción sobre el número de vértices de un árbol T.

Si T tiene 2 vértice no hay nada que probar

Si T tiene 2 vértices, entonces se tiene $\underset{x}{\bullet} \longrightarrow \underset{y}{\bullet}$ ó $y \bullet \longrightarrow \bullet\, x$

y se cumple el corolario.

Supongamos ahora que el resultado se cumple para todos los árboles con $n-1$ vértices y probemos el caso para n. Entonces, sea T un árbol con n vértices.

Comencemos en T con orientación Q, Sea x una hoja en T, y sea y el vértice vecino a x. Supongamos la orientación es $y \to x$.

Ahora, contraemos los vértices x y y en un vértice V_{xy}, ie.

Obtenemos un árbol $T/_{xy}$ con la orientación de Q (salvo por $y \to x$).

De igual forma obtenemos el mismo árbol $T/_{xy}$ con la orientación de Q'. (salvo la orientación entre x y y en Q').

Luego $T/_{xy}$ tiene $n-1$ vértices, y así, por inducción

Q' se obtiene de Q^* de una secuencia de pozos y fuentes.

entonces en G', al arbol $T/_{xy}$ regresamos los vértices x, y.

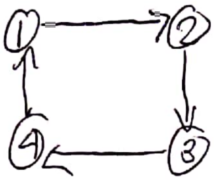
Luego x es fuente y se obtiene la afirmación después de una mutación,

o es pozo y el resultado es directo ■

Ejercicio 2.23

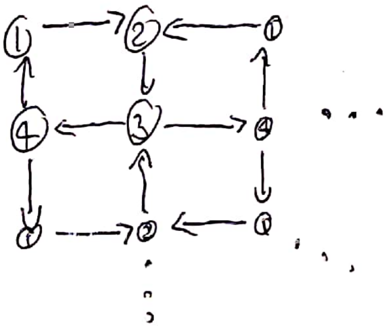
Queremos ver que el carcaj de un cuadrado K×n es equivalente bajo mutación a la versión triangulada.

Empezamos por etiquetar a los vértices del primer 4-ciclo ubicado en la esquina superior izquierda tal como



Notemos que el resto de 4-ciclos puede etiquetarse de la misma manera

i.e.

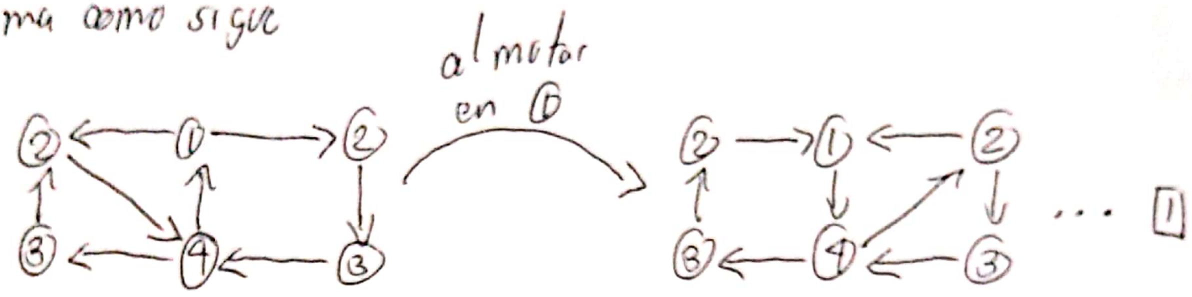


① Comenzamos por hacer mutación en el primer ③ del primer 4-ciclo.

Notemos que esto nos da flechas de ② a ④ en los primeros 4 ciclos
además que ya obtuvimos la triangulación deseada en los vértices del primer 4-ciclo (antes de mutación) i.e en la cuadrícula 2×2

② Lo siguiente es eliminar las restantes flechas de ② a ④ aplicando mutaciones en los vértices etiquetados con ① en las cuadrículas restantes que tienen flecha de ② a ④

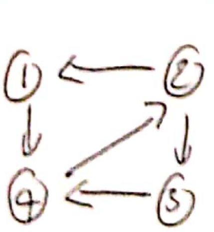
Al aplicar la mutación en el segundo etiquetado (correspondiente al segundo 4-ciclo) en la parte superior en el siguiente 4 ciclo se transforma como sigue



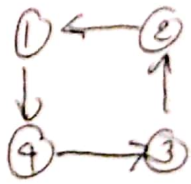
③ En particular, en el siguiente 4 ciclo, después de mutar en ①, se agrega una flecha de ④ a ② como en [1].

De forma análoga al hacer las mutaciones en los demás ①'s ocurre algo análogo, de donde se sigue que al obtener mutaciones

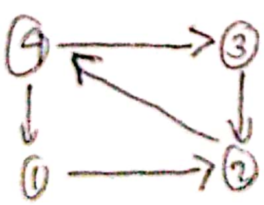
como



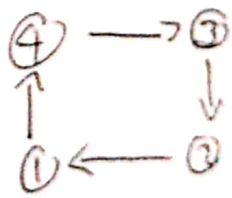
se muta en ③ y se obtiene



ó al obtener expresiones como

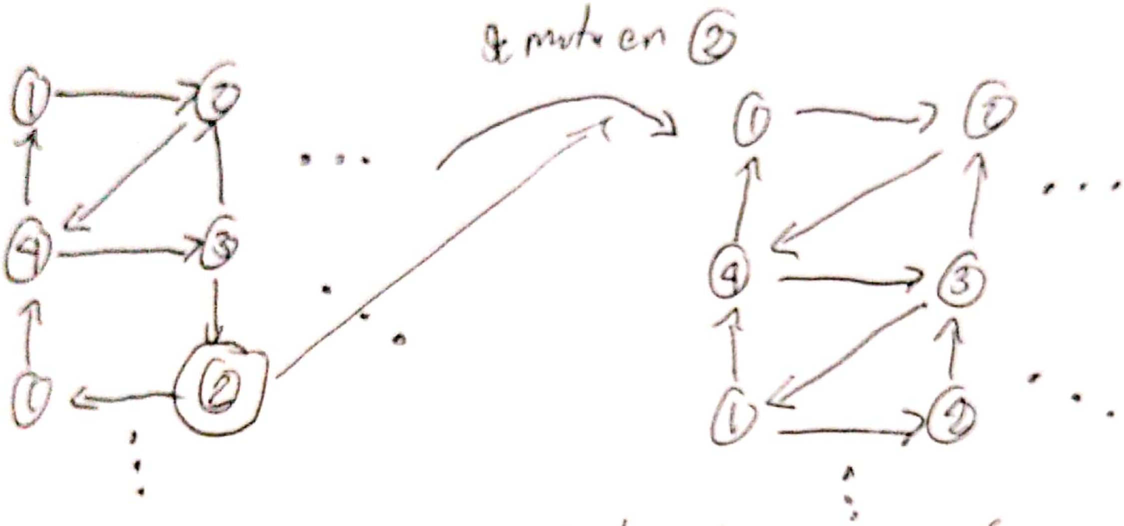


se muta en ① y se obtiene



se procede así hasta que se tiene la condición original pero con la triangulación en el primer 4 ciclo.

Entonces se procede así con los pares del 1 al 3 iniciando en la segunda cuadrícula de arriba a abajo, en este caso iniciando la mutación en 2 : c



se procede a eliminar las restantes diagonales (como en 3)

y se prosigue.

//

Ejercicio 2.29

Probar el lema

Sean Q y Q' dos carcajes de hielo con n vértices mutables y m vértices congelados que son isomorfos. Sean $\pi_1 \in S_n$ y $\pi_2 \in S_m$ las permutaciones que transforman Q a Q' y $\pi_1 \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, $\pi_2 \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ las matrices que las representan. Entonces

$$(\pi_1, \pi_2)\widetilde{B}(Q)\pi_1 := \begin{pmatrix} \pi_1 & 0 \\ 0 & \pi_2 \end{pmatrix}\widetilde{B}(Q)\pi_1 = \widetilde{B}(Q')$$

Demostración:

Sabemos que Q' se obtiene de Q después de una permutación $\pi_1 \in S_n$ en mutables y una permutación $\pi_2 \in S_m$ en congelados. De tal modo que en $\widetilde{B}(Q')$ consideramos la nueva etiquetación por las permutaciones.

Notemos que $\begin{pmatrix} \pi_1 & 0 \\ 0 & \pi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{(n+m)\times(n+m)}$, de tal modo que la submatriz

$(\pi_1, 0)\widetilde{B}(Q)$ cambia el órden por la permutación en las filas en los vértices mutables y no considera a los congelados

Por otra parte, la submatriz

$(0, \pi_2)\widetilde{B}(Q)$ cambia el órden por la permutación en las filas en los vértices congelados y no considera a los mutables

Finalmente, al realizar la multiplicación por π_1, cambia el órden en las columnas en los vértices mutables, de donde $(\pi_1, \pi_2)\widetilde{B}(Q)\pi_1 = \widetilde{B}(Q')$ ∎

Ejercicio 2.30

Sea Q un carcaj de hielo, $\tilde{B}(Q)$ la matriz de intercambio extendida. Para k un vértice mutable de Q sea

$$\tilde{B}(\mu_k(Q)) = (b'_{ij})_{i,j} \quad , \text{ entonces}$$

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } k \in \{i,j\} \quad \ldots (1) \\ b_{ij} + b_{ik} b_{kj} & \text{si } b_{ik} > 0 \text{ y } b_{jk} > 0 \ldots (2) \\ b_{ij} - b_{ik} b_{kj} & \text{si } b_{ik} < 0 \text{ y } b_{jk} < 0 \ldots (3) \\ b_{ij} & \text{por lo demás} \quad \ldots (4) \end{cases}$$

Verificar que la fórmula para b'_{ij} es la traducción de la mutación de Q.

Solución

Como la mutación en k sólo modifica la dirección de las flechas, o agrega flechas entre vértices adyacentes a k, la posibilidad (4) para $b'_{ij} = b_{ij}$ es inmediata si i, j no son adyacentes a k.

Para el resto, en (1) si $k \in \{i,j\}$, entonces se tiene una dirección $i \to j$ o $j \to i$; en cualquier caso, al mutar se revierte la dirección y por esto cambia el signo en $\tilde{B}(\mu_k(Q))$, i.e $b'_{ij} = -b_{ij}$

Para el caso (2) la traducción resulta de considerar los caminos de la forma

$$\begin{tikzcd} & j \\ i \arrow[r] & k \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \cdots \quad \boxed{1}$$

entonces b_{ij} nos cuenta las flechas de i a j. Notemos que estas no se modifican al mutar en K, pero se agregan $b_{ik} b_{kj}$ caminos de i a j por el paso de la mutación, de donde se sigue que

$$(b_{ij})' = b_{ij} + b_{ik} b_{kj}$$

Para el caso (3) se procede de forma análoga pero esta vez se revierte el camino como en $\boxed{1}$, i.e se tienen caminos

$$\begin{tikzcd} & i \\ j \arrow[r] & k \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Entonces (3) se obtiene de 2 al usar $b_{ij} = -b_{ji}$

Finalmente, si i, j son adyacentes a K pero con caminos

$$i \longrightarrow \underset{k}{\circ} \longleftarrow j \quad \text{ó} \quad i \longleftarrow \underset{k}{\circ} \longrightarrow j$$

entonces el proceso de mutación no altera a b_{ij}, y sumado a la primer observación se tiene el resultado ■

Demostrar 2) y 4) de:

Proposición 2.34. Sea $\tilde{B} = (b_{ij})_{1 \leq n+m, 1 \leq j \leq n}$ una matriz extendida casi-simetrizable y $k \in [n]$. Entonces,

2) La mutación de matrices es una involución

$$\mu_k(\mu_k(\tilde{B})) = \tilde{B}.$$

4) Si $b_{ij} = b_{ji} = 0$ entonces $\mu_i(\mu_j(\tilde{B})) = \mu_j(\mu_i(\tilde{B}))$

Demostración:

Sabemos que
$$b_{ij}' = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } k \in \{i,j\} \quad \dots ① \\ b_{ij} + b_{ik} b_{kj} & \text{si } b_{ik} > 0 \text{ y } b_{kj} > 0 \quad \dots ② \\ b_{ij} - b_{ik} b_{kj} & \text{si } b_{ik} < 0 \text{ y } b_{kj} < 0 \quad \dots ③ \\ b_{ij} & \text{por lo demas} \quad \dots ④ \end{cases}$$
en $\mu_k(\tilde{B})$

Entonces:

2): Si $k \in \{i,j\}$ entonces $(b_{ij}')' = -(-b_{ij}) = b_{ij}$ y se cumple ①

Notemos que ② y ③ se cumplen de ①, pues se invierten lo signo i.e si en $\mu_k(\tilde{B})$ se tiene

$$b_{ij}' = b_{ij} + b_{ik} b_{kj} \quad \text{con } b_{ik} > 0 \text{ y } b_{ki} > 0$$

y al mutar nuevamente en k, por la condicion ① $b_{ik}' = -b_{ik}$ y $b_{kj}' = -b_{kj}$ $\therefore$ en $\mu_k(\tilde{B})$ se tiene

$$(b_{ij}')' = (b_{ij} + (b_{ik} b_{kj})) - b_{ik} b_{kj} = b_{ij}$$

de forma similar en ③ $(b_{ij}')' = (b_{ij} - (b_{ik} b_{kj})) + b_{ik} b_{kj} = b_{ij}$

El caso ④ es trivial ∎

Escaneado con CamScanner

Notemos que si $\tilde{B} = \tilde{B}(Q)$ para un carcaj Q, entonces el resultado es inmediato del ejercicio 2.6 $(\mu_k(\mu_k(Q)))$, y el lema 2.30 C

4) Primero notemos que dada la condición $b_{ij} = b_{ji} = 0$ entonces $(b_{ij}') = 0$ en $\mu_i(\tilde{B})$ y $\mu_j(\tilde{B})$, y $\therefore$ $(b_{ij}')' = 0$ en $\mu_j(\mu_i(\tilde{B}))$ y en $\mu_i(\mu_j(\tilde{B}))$

luego si $k \neq j \neq p$, entonces

$$b_{kp}' = \begin{cases} -b_{kp} & \text{si } i \in \{k,p\} \\ b_{kp} + b_{ki} b_{ip} & \text{si } b_{ki} > 0 \text{ y } b_{ip} > 0 \\ b_{kp} - b_{ki} b_{ip} & \text{si } b_{ki} < 0 \text{ y } b_{ip} < 0 \\ b_{kp} & \text{por lo demás.} \end{cases} \quad \ldots \boxed{I}$$

análogamente ocurre lo mismo si se toma j en vez de i, y $k \neq i \neq p$.

Luego, veamos la siguiente mutación, con $k \neq i$

$$b_{ik}' = \begin{cases} -b_{ik} & j \in \{i,k\} \\ b_{ik} + \cancel{b_{ij} b_{jk}}^{\,0} & b_{ij} > 0 \text{ y } b_{ik} > 0 \\ b_{ik} - \cancel{b_{ij} b_{jk}}^{\,0} & b_{ij} < 0 \text{ y } b_{jk} < 0 \\ b_{ik} & \text{otro caso} \end{cases}$$

análogamente en el caso b_{jk}, con $k \neq j$

Entonces, sólo nos centramos en $\boxed{I}$, ie b_{kp}' se obtiene de $\mu_i(\tilde{B})$, ahora mutamos en j $\mu_j(\mu_i(\tilde{B}))$, y obtenemos las siguientes posibilidades

$$
(b_{kp}')' = \begin{cases} -b_{kp}' & \text{si } j \in \{k, p\} \\ (b_{kp} + b_{ki} b_{ip}) + b_{kj} b_{jp} \\ (b_{kp} + b_{ki} b_{ip}) - b_{kj} b_{jp} \\ (b_{kp} - b_{ki} b_{ip}) + b_{kj} b_{jp} \\ (b_{kp} - b_{ki} b_{ip}) - b_{kj} b_{jp} \\ b_{kp} \end{cases}
$$

Notemos que por la construcción $(b_{kp}')'$ no depende del órden de la mutación i.e $\mu_i(\mu_j(\tilde{B})) = \mu_j(\mu_i(\tilde{B}))$.

Notemos que si $\tilde{B} = \tilde{B}(Q)$, entonces la condicion $b_{ij} = b_{ji} = 0$

equivale que no hay flechas entre los vértices mutables i y j.
Entonces el resultado se sigue del ejercicio 2.8 y el lema 2.30 ■

Ejercicio 2.41. Verifica que la mutación de semillas es una involución.
es decir $\mu_k(\mu_k(\tilde{x},\tilde{B}))=(\tilde{x},\tilde{B})$

Solución.

$$\mu_k(\mu_k(\tilde{x},\tilde{B}))=(\mu_k(\mu_k(\tilde{x})),\mu_k(\mu_k(\tilde{B})))$$

$$=(\mu_k(\mu_k(\tilde{x})),\tilde{B}) \text{ por la proposición 2.34 2).}$$

luego en $\mu_k(\tilde{x})$ $x_i'=x_i$ si $i\neq k$, y si $i=k$

se tiene

$$x_k'=\frac{\prod_{i=1,b_{ik}>0}^{n+m} x_i^{b_{ik}}+\prod_{i=1,b_{ik}<0}^{n+m} x_i^{-b_{ik}}}{x_k}$$

, ahora, en $\mu_k(\mu_k(\tilde{B}))$

luego $x_i''=x_i$ si $i\neq k$ y si $i=k$

$$x_k''=\frac{\prod_{i=1,b_{ik}>0}^{n+m} x_i^{b_{ik}}+\prod_{i=1,b_{ik}<0}^{n+m} x_i^{-b_{ik}}}{\dfrac{\prod_{i=1,b_{ik}>0}^{n+m} x_i^{b_{ik}}+\prod_{i=1,b_{ik}<0}^{n+m} x_i^{-b_{ik}}}{x_k}}=x_k$$

$\therefore$ $\mu_k(\mu_k(\tilde{x}))=\tilde{x}$, de donde se sigue el resultado