Ejercicios 4 del curso "Álgebras de Conglomerado"

Lara Bossinger

semestre 2022-1

5. Coeficientes

5.4. F-polinomios, g-vectores y c-vectores

Ejercicio 5.10. Repiten el Ejemplo 5.32 con el algebra de conglomerado asociado al carcaj $1 \to 2 \to 3$ de tipo $\mathtt{A}_3$ con coeficientes principales y verifica que también en este caso tenemos:

1. las G-matrices coinciden con las parte extendida de las matrices de intercambio extendidas transpuestas bajo permutación;
2. las filas de las G_t tienen entradas o no-negativas o no-positivas.

5.5. El g-abanico

Ejercicio 5.11. Sea $Q = 1 \to 2 \to 3$ como en el Ejemplo 5.44. Calcula el **g**-abanico del álgebra de conglomerado definido por Q^{prin}.

6. Variedades de conglomerado

6.1. Las variedades $\mathcal{A}$ y $\mathcal{X}$

Ejercicio 6.1. Sean L una latiz y $L^* := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$ su latiz dual. Con $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L^* \to \mathbb{Z}$ denotamos su emparejamiento dual y fijamos $(\ell, \ell') \in L \times L^*$ tal que $\langle \ell, \ell' \rangle = 0$. En el cuerpo de fracciones del álgebra del grupo $\mathbb{C}[L^*]$ definimos el mapeo

$$\mu^*_{(\ell,\ell')} : \mathbb{C}(L^*) \to \mathbb{C}(L^*), \quad z^a \mapsto z^a(1 + z^{\ell'})^{\langle a, \ell \rangle} \tag{1}$$

donde $z^a \in \mathbb{C}[L^*]$. Muestra que los pull-back en la Definición 6.2 son de la forma $\mu^*_{(\ell,\ell')}$.

Solución: Nota que $d_k v_k = \{d_k e_k, \cdot\} = \{e_k, d_k \cdot\} : N \to \mathbb{Z}$, pues $d_k v_k \in M$. Entonces tenemos

$$\mu^*_{k;\mathcal{X}} = \mu^*_{(d_k v_k, e_k)}, \quad \text{y} \quad \mu^*_{k;\mathcal{A}} = \mu^*_{(-d_k e_k, v_k)} \tag{2}$$

6.2. Mapeos de ensamble de conglomerado

Ejercicio 6.2. Sea s los datos de una semilla y definimos un mapeo $p^* : N \to M^\circ$ cons respect a s por la matriz

$$\widetilde{B_s} := \begin{pmatrix} B_s & -\left(D_{\mathrm{cong}}^{-1}\hat{B}_s D_{\mathrm{mut}}\right)^T \\ \hat{B}_s & A_s \end{pmatrix}.$$

Si $\mu_k(s) = s'$ muestra que la matriz $\widetilde{B_{s'}}$ que representa p^* con respecto a s' se obtiene de $\widetilde{B_s}$ por la regla de mutación de matrices (2.4). *Tipp: Calcula las matrices del cambio de la base de s a $\mu_k(s)$.*

Ejercicio 6.3. Verifica el último paso en el calcula de $p^*(e_j')$ en la prueba de la Proposición 6.15.

Ejercicio 6.4. Muestra el Corolario 6.16, que dice: si $p^* : N \to M^\circ$ un isomorfismo de latices entonces $p^* : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ es un isomorfismo de esquemas.

6.2.1. Ejercicios

Ejercicio 6.5. Definimos la *tropicalización* de un polinomio $f \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_{n+m}^{\pm 1}]$ con $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m t^m$ como

$$f^{\mathrm{Trop}} : \mathbb{Z}^{n+m} \to \mathbb{Z}, \quad a \mapsto \max\{\langle a, m\rangle : c_m \neq 0\}.$$

De manera similar una función racional libre de substracciones $\frac{f}{g}$ con $f, g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_{n+m}^{\pm 1}]$ se tropicaliza a

$$f^{\mathrm{Trop}} - g^{\mathrm{Trop}} : \mathbb{Z}^{n+m} \to \mathbb{Z}, \quad a \mapsto f^{\mathrm{Trop}}(a) - g^{\mathrm{Trop}}(a).$$

Para un mapeo $\phi : (\mathbb{C}^*)^{n+m} \to (\mathbb{C}^*)^{n+m}$ definido por $a = (a_1, \ldots, a_{n+m}) \mapsto (\phi_1(a), \ldots, \phi_{n+m}(a))$ definimos la tropicalización $\phi^{\mathrm{Trop}} : \mathbb{Z}^{n+m} \to \mathbb{Z}^{n+m}$ como

$$p \mapsto \left(\phi_1^{\mathrm{Trop}}(p), \ldots, \phi_{n+m}^{\mathrm{Trop}}(p)\right).$$

1. Calcula la tropicalización de $\mu_{k;\mathcal{A}} : T_{N_s^\circ} \dashrightarrow T_{N_{s'}^\circ}$.
2. Calcula la tropicalización de $\mu_{k;\mathcal{X}} : T_{M_s} \dashrightarrow T_{M_{s'}}$.
3. Sea $p : T_{N^\circ} \to T_M$ un mapeo de ensamble de conglomerado. Para s' los datos de la semilla obtenida de s por mutación en la dirección k muestra que el diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} N_s^\circ \arrow[r, "p^{\mathrm{Trop}}"] \arrow[d, "\mu_{k;\mathcal{A}}^{\mathrm{Trop}}"'] & M_s \arrow[d, "\mu_{k;\mathcal{X}}^{\mathrm{Trop}}"] \\ N_{s'}^\circ \arrow[r, "p^{\mathrm{Trop}}"'] & M_{s'} \end{tikzcd} \tag{3}$$

Solución:

1. Para calcular la tropicalización fijamos primero las coordenadas $\{x_i := z^{f_i} : e_i \in s\}$ para $T_{N_s^\circ}$ y $\{x_i' := z^{f_i'} : e_i' \in s'\}$ para $T_{N_{s'}^\circ}$. Por la Proposición 3.14 tenemos

$$\begin{array}{rcl} \mu_{k;\mathcal{A}} : T_{N_s^\circ} & \dashrightarrow & T_{N_{s'}^\circ} \\ (x_1, \dots, x_{n+m}) & \mapsto & \left(x_1, \dots, \dfrac{1}{x_k}\left(\displaystyle\prod_{i\in I} x_i^{[b_{ik}]_+} + \prod_{i\in I} x_i^{[-b_{ik}]_+}\right), \dots, x_{n+m} \right) \end{array}$$

Según la definición de la tropicalización entonces obtenemos $\mu_{k;\mathcal{A}}^{\mathrm{Trop}} : N_s^\circ \to N_{s'}^\circ$ definido por

$$p \mapsto \left(\langle f_1, p\rangle, \dots, \max\left\{ \left\langle \sum_{i\in I}[b_{ik}]_+ f_i - f_k, p \right\rangle, \left\langle \sum_{i\in I}[-b_{ik}]_+ f_i - f_k, p \right\rangle \right\}, \dots, \langle f_{n+m}, p\rangle \right).$$

Note que $\sum_{i\in I} b_{ik} f_i = p^*(e_k)$ y el máximo depende del signo de $\langle p^*(e_k), p\rangle$. Es decir, $\mu_{k;\mathcal{A}}^{\mathrm{Trop}}$ es un mapeo lineal por pedazos con dos regiones de linealidad separado por el hiperplano $H_{p^*(e_k)} = \{p \in N^\circ : \langle p^*(e_k), p\rangle = 0\}$. Recuerda que $\{d_i e_i : i \in I\}$ es la base de N_s° dual a la base $\{f_i : i \in I\}$ de M_s° (y similar para $N_{s'}^\circ$). Entonces para $p \in N_s^\circ$ de forma $p = \sum_{i\in I} p_i(d_i e_i)$ tenemos

$$\mu_{k;\mathcal{A}}^{\mathrm{Trop}}(p) = \begin{cases} \sum_{i\neq k} p_i(d_i e_i') + \left(\sum_{i\in I}[b_{ik}]_+ p_i - p_k\right) d_k e_k' & p \in H^+_{p^*(e_k)} \\ \sum_{i\neq k} p_i(d_i {e'}_i) + \left(\sum_{i\in I}[-b_{ik}]_+ p_i - p_k\right) d_k e_k' & p \in H^-_{p^*(e_k)} \end{cases}$$

donde $H_q^+ := \{p \in N^\circ : \langle q, p\rangle \geq 0\}$ y $H_q^- := \{p \in N^\circ : \langle q, p\rangle \leq 0\}$ para $q \in M^\circ$. En particular, los dos mapeos lineales que definen $\mu_{k;\mathcal{A}}^{\mathrm{Trop}}$ son

$$\mathrm{M}^+_{k;\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ [b_{1k}]_+ & \cdots & [b_{n+m,k}]_+ \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } H^+_{p^*(e_k)}$$

$$\mathrm{M}^-_{k;\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ [-b_{1k}]_+ & \cdots & [-b_{n+m,k}]_+ \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } H^-_{p^*(e_k)}$$

donde la entrada -1 en la diagonal está en la posición k y la única fila no cero en las segundas matrices es la fila k.

2. Sean $\{y_i = z^{e_i} : e_i \in s\}$ y $\{y_i' = z^{e_i'} : e_i' \in s'\}$ las coordenadas de los toros T_{M_s} y $T_{M_{s'}}$. Por la Proposición **??** sabemos que

$$\begin{array}{rcl} \mu_{k;\mathcal{X}} : T_{M_s} & \dashrightarrow & T_{M_{s'}} \\ (y_1, \dots, y_{n+m}) & \mapsto & \left(y_1\left(1 + y_k^{\mathrm{sgn}(-b_{k1})}\right)^{-b_{k1}}, \dots, y_k^{-1}, \dots, y_{n+m}\left(1 + y_k^{\mathrm{sgn}(-b_{k,n+m})}\right)^{-b_{k,n+m}} \right) \end{array}$$

Para $j \neq k$ tenemos dos casos:

$$y_j\left(y_k^{\mathrm{sgn}(-b_{kj})} + 1\right)^{-b_{kj}} = \begin{cases} \frac{y_j y_k^{b_{kj}}}{(1+y_k)^{b_{kj}}} & b_{kj} \geq 0 \\ y_j(1+y_k)^{-b_{kj}} & b_{kj} < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Nota que para cada $q \in M_s$ y cada $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tenemos

$$((1+y_k)^c)^{\text{Trop}}(q) = \text{máx}\{0, c\langle e_k, q\rangle\} = \begin{cases} cq_k & q \in H^+_{e_k} \\ 0 & q \in H^-_{e_k} \end{cases}.$$

Por lo tanto la tropicalización $\mu^{\text{Trop}}_{k;\mathcal{X}} : M_s \to M_{s'}$ es definido por $\mu^{\text{Trop}}_{k;\mathcal{X}}(q_1, \ldots, q_{n+m}) = (q'_1, \ldots, q'_{n+m})$ donde $q'_k = -q_k$ y para $k \neq j$

$$\begin{aligned} q'_j &= \begin{cases} q_j + b_{kj}q_k - \text{máx}\{0, b_{kj}q_k\} & b_{kj} \geq 0 \\ \text{máx}\{q_j, q_j - b_{kj}q_k\} & b_{kj} < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} q_j & b_{kj} \geq 0, q \in H^+_{e_k} \\ q_j + b_{kj}p_k & b_{kj} \geq 0, q \in H^-_{e_k} \\ q_j - b_{kj}q_k & b_{kj} < 0, q \in H^+_{e_k} \\ q_j & b_{kj} < 0, q \in H^-_{e_k} \end{cases} \\ &= \begin{cases} q_j + [-b_{kj}]_+ q_k & q \in H^+_{e_k} \\ q_j + [b_{kj}]_+ q_k & q \in H^-_{e_k} \end{cases}. \end{aligned}$$

Sean $\{e^*_i : i \in I\}$ es la base dual de M_s y $\{e'^*_i : i \in I\}$ es la base dual de $M_{s'}$. Entonces, $\mu^{\text{Trop}}_{k;\mathcal{X}}$ es un mapeo lineal por pedazos con dos regiones de linealidad separado por el hiperplano H_{e_k} y definido para $q \in M_s$ con $q = \sum_{i \in I} q_i e^*_i$ por

$$\mu^{\text{Trop}}_{k;\mathcal{X}}(q) = \begin{cases} \sum_{i \neq k}(q_i + [-b_{ki}]_+ q_k)e'^*_i - q_k e'^*_k & q \in H^+_{e_k} \\ \sum_{i \neq k}(q_i + [b_{ki}]_+ q_k)e'^*_i - q_k e'^*_k & q \in H^-_{e_k} \end{cases}$$

En particular, los mapeos lineales que definen $\mu^{\text{Trop}}_{k;\mathcal{X}}$ son

$$\text{M}^+_{k;\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & [-b_{k1}]_+ & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & [-b_{k,n+m}]_+ & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } H^+_{e_k}$$

$$\text{M}^-_{k;\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & [b_{k1}]_+ & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & [b_{k,n+m}]_+ & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } H^-_{e_k}$$

donde la entrada -1 en la diagonal está en la posición k y la única columna no cero en la segunda matriz es la columna k.

3. Sea $p^* : N \to M^\circ$ un mapeo de ensamble de conglomerado. dado con respecto a los datos de una semilla s por la matriz $\widetilde{B}_s$ como en el Ejercicio 6.2. Entonces, con respecto a los coordenadas definidos por $s = (e_i : i \in I)$ tenemos

$$p : T_{N^\circ_s} \to T_{M_s}, \quad z \mapsto (z^{p^*(e_1)}, \ldots z^{p^*(e_{n+m})}).$$

Por lo tanto la tropicalización $p^{\text{Trop}} : N^\circ_s \to M_s$ satisface

$$p \mapsto (\langle p^*(e_1), p\rangle, \ldots, \langle p^*(e_{n+m}), p\rangle).$$

Es decir, p^{Trop} con respecto a los bases $\{d_i e_i : i \in I\}$ de N_s° y $\{e_i^* : i \in I\}$ de M_s es definido por la matriz transpuesta $\widetilde{B_s}^T$. Entonces,

$$p^{\mathrm{Trop}}(p) = \sum_{i\in I} \langle p^*(e_i), p\rangle e_i^*$$

En particular, $p^{\mathrm{Trop}}(H^{\pm}_{p^*(e_k)}) = H^{\pm}_{e_k}$ por lo tanto podemos verificar la comuntativadad del diagrama (3) en los dos casos:

$$\begin{tikzcd} H^+_{p^*(e_k)} \arrow[r, "\widetilde{B_s}^T"] \arrow[d, "\mathrm{M}^+_{k;\mathcal{A}}"'] & H^+_{e_k} \arrow[d, "\mathrm{M}^+_{k;\mathcal{X}}"] \\ N^\circ_{s'} \arrow[r, "\widetilde{B^T_{s'}}"'] & M_{s'} \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} H^-_{p^*(e_k)} \arrow[r, "\widetilde{B_s}^T"] \arrow[d, "\mathrm{M}^-_{k;\mathcal{A}}"'] & H^-_{e_k} \arrow[d, "\mathrm{M}^-_{k;\mathcal{X}}"] \\ N^\circ_{s'} \arrow[r, "\widetilde{B^T_{s'}}"'] & M_{s'} \end{tikzcd}$$

Nota que las matrices $\mathrm{M}^{\pm}_{k;\mathcal{A}}$ y $\mathrm{M}^{\pm}_{k;\mathcal{X}}$ son justo las matrices de (2.7) que determinan la mutación de matrices. Además, satisfacen $\mathrm{M}^{\pm}_{k;\mathcal{A}} = \left(\mathrm{M}^{\pm}_{k;\mathcal{A}}\right)^{-1}$ y $\mathrm{M}^{\pm}_{k;\mathcal{X}} = \left(\mathrm{M}^{\pm}_{k;\mathcal{X}}\right)^{-1}$. En particular, la matriz $\widetilde{B_{s'}}^T$ según el Ejercicios 6.2 satisface

$$\widetilde{B_{s'}}^T \quad = \quad \mathrm{M}^{\pm}_{k;\mathcal{X}}\, \widetilde{B_s}^T\, \mathrm{M}^{\pm}_{k;\mathcal{A}}\,.$$

Ejercicio 6.6. Definimos el *dual de Langlands* $\Gamma^\vee$ de los datos fijos Γ:

- $N^\vee := N^\circ$ con sublatiz saturada $D \cdot N =: (N^\vee)^\circ$ donde $D := \mathrm{mmc}(d_1, \dots, d_{n+m})$ es el mínimo múltiple común;
- la forma bilineal casi-simétrica es $\{\cdot,\cdot\}^\vee : N^\vee \times N^\vee \to \mathbb{Q}$, donde $\{\cdot,\cdot\}^\vee := D^{-1}\{\cdot,\cdot\}$;
- $I^\vee := I$ y $I^\vee_{\mathrm{mut}} := I_{\mathrm{mut}}$;
- para cada $i \in I^\vee$ definimos $d_i^\vee := d_i^{-1} D$;
- las latices duales son $M^\vee = M^\circ$ y $(M^\vee)^\circ = D^{-1} M$.

Nota que en el caso casi-simétrico donde $d_i = 1$ en Γ tenemos $\Gamma^\vee = \Gamma$. Dado los datos de una semilla $s = (e_i : i \in I)$ para Γ definimos los *datos de una semilla dual* para $\Gamma^\vee$

$$s^\vee := (e_i^\vee : i \in I), \quad e_i^\vee := d_i e_i$$

1. ¿Cuales son las bases de $N^\vee, (N^\vee)^\circ, M^\vee$ y $(M^\vee)^\circ$ obtenidos de los datos $s^\vee$?
2. Sea $\epsilon = (\epsilon_{ij})_{i\in I_{\mathrm{mut}}, j\in I}$ la matriz asociada a los datos Γ y s. Muestra que la matriz $\epsilon^\vee := (\epsilon^\vee_{ij})_{i\in I^\vee_{\mathrm{mut}}, j\in I^\vee}$ donde $\epsilon^\vee_{ij} := \{e_i^\vee, d_j^\vee e_j^\vee\}^\vee$ coincide (bajo un signo) con la matriz que determina p_2^* para Γ con respecto a s.
3. Dado un mapeo de ensamble de conglomerado $p^* : N \to M^\circ$ para Γ definido con respecto a los datos de una semilla s por la matriz $\widetilde{B_s}$. ¿Cuál sea una matriz asociada $\widetilde{B_{s^\vee}}$ que determina un mapeo de ensamble de conglomerado para $\Gamma^\vee$?

Las variedades de conglomerado asociado a los datos fijos $\Gamma^\vee$ son

$$\mathcal{A}_{\Gamma^\vee} := \bigcup T_{(N^\vee)^\circ} \quad \text{y} \quad \mathcal{X}_{\Gamma^\vee} = \bigcup T_{M^\vee}.$$

5. Muestra que los **g**-vectores asociados a las datos fijos Γ satisfacen la mutación obtenida de la tropicalización de $\mu_{k;\mathcal{X}_{\Gamma^\vee}} : T_{M^\vee_{s^\vee}} \dashrightarrow T_{M^\vee_{s'^\vee}}$. *Tipp: Usa el Ejercicio 6.5 y el Corolario 5.40.*

Solución:

1. Las bases son
   - $\{e_i^\vee = d_i e_i : i \in I\}$ para $N^\vee = N^\circ$;
   - $\{(e_i^\vee)^* = f_i : i \in I\}$ para $M^\vee = M^\circ$;
   - $\{d_i^\vee e_i^\vee = De_i : i \in I\}$ para $(N^\vee)^\circ = D \cdot N$;
   - $\{f_i^\vee = (d_i^\vee)^{-1}(e_i^\vee)^* = D^{-1}e_i^* : i \in I\}$ para $(M^\vee)^\circ = D^{-1} \cdot M$.

2. Tenemos

$$\epsilon_{ij}^\vee = \{e_i^\vee, d_j^\vee e_j^\vee\}^\vee = D^{-1}\{d_i e_i, De_j\} = -\{e_j, d_i e_i\} = -\epsilon_{ji} = -b_{ij}.$$

   Por lo tanto $\epsilon_{s^\vee}^\vee = (-B_s \quad)$.

3. Tres de los cuatro bloques que determinan $\widetilde{B_{s^\vee}}$ son determinadas por $\epsilon^\vee$. Según el calculo anterior tenemos $b_{ji}^\vee = -b_{ij}$. Por lo tanto la matriz $-\widetilde{B_s}^T =: \widetilde{B_{s^\vee}}$ define un mapeo de ensamble de conglomerado $p^\vee : T_{(N^\vee)^\circ} \to T_{M^\vee}$ con pull-back determinado por $\widetilde{B_{s^\vee}} = (p^\vee)^* : N^\vee = N^\circ \to D^{-1} \cdot M = (M^\vee)^\circ$.

4. La tropicalización es $\mu_{k;\mathcal{X}_{\Gamma^\vee}}^{\text{Trop}} : M_{s^\vee}^\vee \to M_{s'^\vee}^\vee$ donde para $q = \sum_{i \in I^\vee} q_i (e_i^\vee)^*$ tenemos $\mu_{k;\mathcal{X}_{\Gamma^\vee}}^{\text{Trop}}(q) = \sum_{i \in I^\vee} q_i' (e_i'^\vee)^*$. Según el Ejercicio 6.5 $q_k' = -q_k$ y

$$\begin{aligned}
q_i' \quad &= \quad \begin{cases} q_i + [-b_{ki}^\vee]_+ q_k & q_k \geq 0 \\ q_i + [b_{ki}^\vee]_+ q_k & q_k < 0 \end{cases} \\
&\overset{\text{Ejercicio 6.6.3}}{=} \begin{cases} q_i + [b_{ik}]_+ q_k & q_k \geq 0 \\ q_i + [-b_{ik}]_+ q_k & q_k < 0 \end{cases} \\
&= \quad \begin{cases} q_i + b_{ik} q_k & b_{ik} \geq 0, q_k \geq 0 \\ q_i & b_{ik} \geq 0, q_k < 0 \\ q_i & b_{ik} < 0, q_k \geq 0 \\ q_i - b_{ik} q_k & b_{ik} < 0, q_k < 0 \end{cases} \\
&= \quad q_i + [b_{ik}]_+ q_+ - b_{ik} \min\{0, q_k\},
\end{aligned}$$

   lo cual coincide con la formula de mutación para **g**-vectores del Corolario 5.40.