Ejercicios 4 del curso "Álgebras de Conglomerado"

Lara Bossinger

semestre 2022-1

5. Coeficientes

5.4. F-polinomios, g-vectores y c-vectores

Ejercicio 5.10. Repiten el Ejemplo 5.32 con el algebra de conglomerado asociado al carcaj $1 \to 2 \to 3$ de tipo $\mathtt{A}_3$ con coeficientes principales y verifica que también en este caso tenemos:

1. las G-matrices coinciden con las parte extendida de las matrices de intercambio extendidas transpuestas bajo permutación;
2. las filas de las G_t tienen entradas o no-negativas o no-positivas.

5.5. El g-abanico

Ejercicio 5.11. Sea $Q = 1 \to 2 \to 3$ como en el Ejemplo 5.44. Calcula el **g**-abanico del álgebra de conglomerado definido por Q^{prin}.

6. Variedades de conglomerado

6.1. Las variedades $\mathcal{A}$ y $\mathcal{X}$

Ejercicio 6.1. Sean L una latiz y $L^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$ su latiz dual. Con $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L^* \to \mathbb{Z}$ denotamos su emparejamiento dual y fijamos $(\ell, \ell') \in L \times L^*$ tal que $\langle \ell, \ell' \rangle = 0$. En el cuerpo de fracciones del álgebra del grupo $\mathbb{C}[L^*]$ definimos el mapeo

$$\mu^*_{(\ell,\ell')} : \mathbb{C}(L^*) \to \mathbb{C}(L^*), \quad z^a \mapsto z^a(1 + z^{\ell'})^{\langle a, \ell \rangle} \tag{1}$$

donde $z^a \in \mathbb{C}[L^*]$. Muestra que los pull-back en la Definición 6.2 son de la forma $\mu^*_{(\ell,\ell')}$.

6.2. Mapeos de ensamble de conglomerado

Ejercicio 6.2. Sea s los datos de una semilla y definimos un mapeo $p^* : N \to M^\circ$ cons respect a s por la matriz

$$\widetilde{B_s} := \begin{pmatrix} B_s & -\left(D_{\text{cong}}^{-1} \hat{B}_s D_{\text{mut}}\right)^T \\ \hat{B}_s & A_s \end{pmatrix}.$$

Si $\mu_k(s) = s'$ muestra que la matriz $\widetilde{B_{s'}}$ que representa p^* con respecto a s' se obtiene de $\widetilde{B_s}$ por la regla de mutación de matrices (2.4). *Tipp: Calcula las matrices del cambio de la base de s a $\mu_k(s)$.*

Ejercicio 6.3. Verifica el último paso en el calcula de $p^*(e'_j)$ en la prueba de la Proposición 6.15.

Ejercicio 6.4. Muestra el Corolario 6.16, que dice: si $p^* : N \to M^\circ$ un isomorfismo de latices entonces $p^* : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ es un isomorfismo de esquemas.

6.2.1. Ejercicios

Ejercicio 6.5. Definimos la *tropicalización* de un polinomio $f \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_{n+m}^{\pm 1}]$ con $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m t^m$ como

$$f^{\mathrm{Trop}} : \mathbb{Z}^{n+m} \to \mathbb{Z}, \quad a \mapsto \max\{\langle a, m\rangle : c_m \neq 0\}.$$

De manera similar una función racional libre de substracciones $\frac{f}{g}$ con $f, g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_{n+m}^{\pm 1}]$ se tropicaliza a

$$f^{\mathrm{Trop}} - g^{\mathrm{Trop}} : \mathbb{Z}^{n+m} \to \mathbb{Z}, \quad a \mapsto f^{\mathrm{Trop}}(a) - g^{\mathrm{Trop}}(a).$$

Para un mapeo $\phi : (\mathbb{C}^*)^{n+m} \to (\mathbb{C}^*)^{n+m}$ definido por $a = (a_1, \ldots, a_{n+m}) \mapsto (\phi_1(a), \ldots, \phi_{n+m}(a))$ definimos la tropicalización $\phi^{\mathrm{Trop}} : \mathbb{Z}^{n+m} \to \mathbb{Z}^{n+m}$ como

$$p \mapsto \left(\phi_1^{\mathrm{Trop}}(p), \ldots, \phi_{n+m}^{\mathrm{Trop}}(p)\right).$$

1. Calcula la tropicalización de $\mu_{k;\mathcal{A}} : T_{N_s^\circ} \dashrightarrow T_{N_{s'}^\circ}$.
2. Calcula la tropicalización de $\mu_{k;\mathcal{X}} : T_{M_s} \dashrightarrow T_{M_{s'}}$.
3. Sea $p : T_{N^\circ} \to T_M$ un mapeo de ensamble de conglomerado. Para s' los datos de la semilla obtenida de s por mutación en la dirección k muestra que el diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} N_s^\circ \arrow[r, "p^{\mathrm{Trop}}"] \arrow[d, "\mu_{k;\mathcal{A}}^{\mathrm{Trop}}"'] & M_s \arrow[d, "\mu_{k;\mathcal{X}}^{\mathrm{Trop}}"] \\ N_{s'}^\circ \arrow[r, "p^{\mathrm{Trop}}"'] & M_{s'} \end{tikzcd} \tag{2}$$

Ejercicio 6.6. Definimos el *dual de Langlands* $\Gamma^\vee$ de los datos fijos Γ:

- $N^\vee := N^\circ$ con sublatiz saturada $D \cdot N =: (N^\vee)^\circ$ donde $D := \mathrm{mmc}(d_1, \ldots, d_{n+m})$ es el mínimo múltiple común;
- la forma bilineal casi-simétrica es $\{\cdot,\cdot\}^\vee : N^\vee \times N^\vee \to \mathbb{Q}$, donde $\{\cdot,\cdot\}^\vee := D^{-1}\{\cdot,\cdot\}$;
- $I^\vee := I$ y $I_{\mathrm{mut}}^\vee := I_{\mathrm{mut}}$;
- para cada $i \in I^\vee$ definimos $d_i^\vee := d_i^{-1} D$;
- las latices duales son $M^\vee = M^\circ$ y $(M^\vee)^\circ = D^{-1}M$.

Nota que en el caso casi-simétrico donde $d_i = 1$ en Γ tenemos $\Gamma^\vee = \Gamma$. Dado los datos de una semilla $s = (e_i : i \in I)$ para Γ definimos los *datos de una semilla dual* para $\Gamma^\vee$

$$s^\vee := (e_i^\vee : i \in I), \quad e_i^\vee := d_i e_i$$

1. ¿Cuales son las bases de $N^\vee, (N^\vee)^\circ, M^\vee$ y $(M^\vee)^\circ$ obtenidos de los datos $s^\vee$?

2. Sea $\epsilon = (\epsilon_{ij})_{i\in I_{\mathrm{mut}}, j\in I}$ la matriz asociada a los datos Γ y s. Muestra que la matriz $\epsilon^\vee := (\epsilon^\vee_{ij})_{i\in I^\vee_{\mathrm{mut}}, j\in I^\vee}$ donde $\epsilon^\vee_{ij} := \{e^\vee_i, d^\vee_j e^\vee_j\}^\vee$ coincide (bajo un signo) con la matriz que determina p_2^* para Γ con respecto a s.

3. Dado un mapeo de ensamble de conglomerado $p^* : N \to M^\circ$ para Γ definido con respecto a los datos de una semilla s por la matriz $\widetilde{B_s}$. ¿Cuál sea una matriz asociada $\widetilde{B_{s^\vee}}$ que determina un mapeo de ensamble de conglomerado para $\Gamma^\vee$?

Las variedades de conglomerado asociado a los datos fijos $\Gamma^\vee$ son

$$\mathcal{A}_{\Gamma^\vee} := \bigcup T_{(N^\vee)^\circ} \quad \text{y} \quad \mathcal{X}_{\Gamma^\vee} = \bigcup T_{M^\vee}.$$

5. Muestra que los **g**-vectores asociados a las datos fijos Γ satisfacen la mutación obtenida de la tropicalización de $\mu_{k;\mathcal{X}_{\Gamma^\vee}} : T_{M^\vee_{s^\vee}} \dashrightarrow T_{M^\vee_{s'^\vee}}$. *Tipp: Usa el Ejercicio 6.5 y el Corolario 5.40.*