

Curso "Degeneraciones tóricas" semestre 2023-1

Lara Bossinger

Mayo 2022

1 Resumen

Las variedades tóricas son objetos populares en la geometría algebraica porque existe un diccionario entre sus propiedades geométricas (por ejemplo, su dimensión o su grado) y las propiedades de los objetos combinatorios asociados (por ejemplo, los politopos o los abanicos). Muchas teorías y programas en la geometría algebraica y simpléctica se exploran y prueban en variedades tóricas pues estas variedades se entienden muy bien. Si nos interesa otra variedad que no es tórica es deseable acercarse lo más posible a las variedades tóricas: por ejemplo, se buscan *degeneraciones tóricas* de la variedad. Una degeneración tórica es una familia (plana) de variedades que comparten muchas propiedades (por ejemplo, su dimensión, su grado y su polinomio de Hilbert son iguales). Esta familia contiene a la variedad que nos interesa y a una variedad tórica. Por lo tanto, algunas propiedades de nuestra variedad se pueden leer de la combinatoria de la variedad tórica.

Ejemplo. Consideramos la Grassmanniana $\text{Gr}(2, \mathbb{C}^4)$ definida por la ecuación $p_1p_6 + p_3p_4 = p_2p_5$ en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$. La variedad definida por la ecuación $p_1p_6 + tp_3p_4 = p_2p_5$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^5 \times \mathbb{C}$ determina una familia (plana) de variedades en $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$. Es una degeneración tórica de $\text{Gr}(2, \mathbb{C}^4)$: establecer $t = 1$ produce $\text{Gr}(2, \mathbb{C}^4)$ y establecer $t = 0$ produce la variedad tórica definida por la ecuación $p_1p_6 = p_2p_5$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$.

El estudio de las degeneraciones tóricas tiene varias aplicaciones en las matemáticas puras y aplicadas. Por ejemplo hay aplicaciones en la simetría especular, la estadística y la biología matemática.

1.1 Contenido del curso

Las degeneraciones tóricas de una variedad proyectiva se pueden construir desde varios puntos de partida. Nos vamos a enfocar en dos construcciones algebraicas: primero, utilizando las degeneraciones iniciales de un ideal como aparecen en la teoría de Gröbner y en la geometría tropical; y segundo, desde valuaciones en anillos graduadas y los cuerpos de Newton–Okounkov asociados. Resulta ser que ambas construcciones son relacionadas y existen traducciones de una a otra.

Las variedades que aparecen en la teoría de representaciones pueden considerarse como un terreno fértil de ejemplos para estudiar diferentes técnicas para la construcción de degeneraciones tóricas. Aquí se cruzan tres campos principales: *la teoría de representaciones*, *la geometría tropical* y *la teoría de las álgebras de conglomerado*. Las tres se pueden aplicar a estas variedades y producen degeneraciones tóricas con los datos combinatorios asociados que

codifican propiedades geométricas. Si el tiempo lo permite vamos a ver ejemplos desde la teoría de representaciones y las álgebras de conglomerado.

Requisitos: Álgebra moderna y geometría algebraica.

2 Temario

1. Preparación
 - (a) Politopos
 - (b) Variedades tóricas
2. Construcciones de degeneraciones tóricas
 - (a) Ideales iniciales y familias planas
 - (b) Valuaciones y sus álgebras asociadas graduadas
 - (c) Politopos de Newton–Okounkov
3. Resultados y ejemplos
 - (a) Teoremas estructurales
 - (b) Ejemplos de la teoría de representaciones

3 Bibliografía

- [Z95] Ziegler, G.; Ziegler, Günter M. Lectures on polytopes. Graduate Texts in Mathematics, 152. Springer-Verlag, New York (1995)
- [CLS11] Cox, D., Little, J. y Schenck, H.; Toric varieties. Graduate Studies in Mathematics, 124. American Mathematical Society, Providence, RI (2011)
- [KK12] Kaveh, K. y Khovanskii, A.; Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory. *Ann. of Math.* (2) 176 (2012)
- [KM19] Kaveh, K. y Manon, C.; Khovanskii bases, higher rank valuations, and tropical geometry. *SIAM J. Appl. Algebra Geom.* 3 (2019)
- [KMM17] Kiumars, K. y Manon, C. y Murata, T.; On degenerations of projective varieties to complexity-one T-varieties, arXiv:1708.02698 [math.AG]
- [B21] Bossinger, L; Full-rank valuations and toric initial ideals. *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2021)

4 Zoom

<https://cuaieed-unam.zoom.us/j/87287443954?pwd=UWNIT0VKcVFJdi8wTVd5TFcrQ2hkZz09>
Meeting ID: 872 8744 3954
Passcode: 237839