Seminario "Variedades de Conglomerado" semestre 2022-2

Lara Bossinger

miércoles 1:30 pm del 9 de febrero hasta el 25 de mayo 2022

1 Resumen

Las *variedades de conglomerado* son esquemas algebraicos que se obtienen pegando varios copias de un toro algebraica por mapeos biracionales. Fueron introducidas por Fock y Goncharov en su artículo [FG09] y son de gran interés por ser ejemplos tangibles de variedades *log Calabi–Yau*. Son la encarnación geométrica de las álgebras de conglomerado de Fomin y Zelevinsky [FZ02]; un álgebra de conglomerado es un anillo conmutativo que se define de manera recursiva: dado un conjunto de variables algebraicamente independientes–una *semilla*– hay un proceso–la *mutación*– que construye otra semilla reemplazando un elemento del conjunto por un elemento nuevo. Las semillas y las mutaciones son controladas por datos combinatorios como un carcaj o una gráfica plabic. El atlas de una variedad de conglomerado está determinado por la misma información combinatoria: cada semilla da una copia del toro y las mutaciones definen a los mapeos biracionales.

La teoría de las variedades de conglomerado extiende en un sentido amplio la geometría tórica: en la geometría tórica los objetos de interés son compactificaciones del toro; de manera similar muchas variedades Fano son compactificaciones de variedades de conglomerado. Por ejemplo, algunos superficies del Pezzo, las Grassmannianas y varias variedades de banderas. También existen análogos de los politopos y abanicos que controlan las compactificaciones de toros en la geometría tórica, e.g. [CMN21]. Además las variedades de conglomerado admiten degeneraciones tóricas, ver [GHKK18, BFMN20]. Las variedades de conglomerado por su estructura combinatoria son ejemplos fértiles para explorar nuevas teorías. Un ejemplo es la simetría especular que tiene su motivación en la teoría de cuerdas en la física teórica, e.g. en [GHKK18].

En este seminario vamos a dedicarnos al estudio de las variedades de conglomerado y algunas aplicaciones de ellas. Una lista tentativa de los temas para las presentaciones semanales se encuentra en §3.

Requisitos: Geometría algebraica y Álgebra conmutativa (necesarios), Geometría tórica y Álgebras de conglomerado (recomendable)

2 La definición

para dar un poco más de luz resumimos brevemente la definición de las variedades de conglomerado.

Sean N una latiz y $M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z})$ su latiz dual. Con $\langle \cdot,\cdot\rangle : N \times M \to \mathbb{Z}$ denotamos su emparejamiento dual y fijamos $(n,m) \in N \times M$ tal que $\langle n,m\rangle = 0$. En el cuerpo de fracciones del álgebra del grupo $\mathbb{C}[M]$ definimos el homomorfismo

$$\mu^*_{(n,m)} : \mathbb{C}(M) \to \mathbb{C}(M), \quad z^{m'} \mapsto z^{m'}(1+z^m)^{\langle n,m'\rangle}, \tag{1}$$

donde $z^{m'} \in \mathbb{C}[M]$. Nos da un mapeo biracional del toro asociado $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M]) = T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, es decir $\mu_{(n,m)} : T_N \dashrightarrow T_N$. Podemos intercambiar las latices N y M en la definición para obtener de manera análoga un mapeo $\mu_{(m,n)} : T_M \dashrightarrow T_M$.

La dualidad de los toros T_N y T_M se extiende a variedades de conglomerado: tenemos dos tipos de variedades de conglomerada que satisfacen la *dualidad de conglomerado*: definimos

$$\mathcal{A} = \bigcup_{s\in S} T_{N;s} \quad \text{y} \quad \mathcal{X} = \bigcup_{s\in S} T_{M;s}$$

donde S es una grafica dirigida. Para cada airsta $s \to s'$ existen $n_{(s,s')} \in N$ y $m_{(s,s')} \in M$ que dan mapeos

$$\mu_{(n_{(s,s')},m_{(s,s')})} : T_{N;s} \dashrightarrow T_{N;s'} \quad \text{y} \quad \mu_{(m_{(s,s')},-n_{(s,s')})} : T_{M;s} \dashrightarrow T_{M;s'}$$

que se usan para pegar las copias $T_{N;s}$ y $T_{N;s'}$ de T_N y $T_{M;s}$ y $T_{M;s'}$ de T_M.

3 Temario

febrero 9 Variedades tóricas proyectivas [CLS11] (Lara)

febrero 16 Variedades de conglomerado [GHK15, §2] (Bosco)

febrero 23 Resumen de las ideas en [GHKK18] (Alfredo)

marzo 2 Diagramas de difusión [GHKK18, §1] (Lara)

marzo 9 La Tropicalización [GHKK18, §2] (Sergio)

marzo 16 Líneas quebradas [GHKK18, §3] (Carolina)

marzo 23 La construcción de $\mathcal{A}$ desde el diagrama de difusión [GHKK18, §4] (Lara)

marzo 30 c- y g-vectores [GHKK18, §5]

abril 6 La conjetura de Fock–Goncharov y mid($\mathcal{A}$) [GHKK18, §0 y §7] (Aram)

abril 13 *semana santa*

abril 20 Politopos positivos y convexidad [CMN21] (Tim)

abril 27 La $\mathcal{A}$-variedad con coeficientes principales [GHK15]

mayo 4 Degeneraciones tóricas de $\mathcal{A}$-variedades [GHKK18, §9]

mayo 11 Aplicaciones a la teoría de representaciones [GHKK18, §10] (Daniel)

mayo 18 Conexiones con la teoría de nudos (José)

mayo 25 TBA

4 Acceso

Liga de zoom: https://cuaieed-unam.zoom.us/j/84968513518?pwd=QnRtNWowY3BtQUpPK09hcGJIOXdyQT09

Meeting ID: 849 6851 3518

Passcode: 174154

References

[BFMN20] Lara Bossinger, Bosco Frías-Medina, Timothy Magee, and Alfredo Nájera Chávez. Toric degenerations of cluster varieties and cluster duality. *Compos. Math.*, 156(10):2149–2206, 2020.

[CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric varieties*. American Mathematical Soc., 2011.

[CMN21] M.-W. Cheung, T. Magee, and A. Nájera Chávez. Compactifications of cluster varieties and convexity. *International Mathematics Research Notices*, 2021.

[FG09] Vladimir V. Fock and Alexander B. Goncharov. Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 42(6):865–930, 2009.

[FZ02] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529, 2002.

[GHK15] Mark Gross, Paul Hacking, and Sean Keel. Birational geometry of cluster algebras. *Algebr. Geom.*, 2(2):137–175, https://arxiv.org/pdf/1309.2573.pdf, 2015.

[GHKK18] Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(2):497–608, 2018.