NIZANDO: A & B anillos conm con 1

$f: A \longrightarrow B$ homomorfismo: $\begin{cases} f(1_A) = 1_B \\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases}$

A-álgebra es un anillo
con un homomorfismo $A \longrightarrow B$.

El núcleo de un homomorfismo $f: A \longrightarrow B$

s un subgrupo $(+)$ & $a \in \ker(f)$ & $x \in A$

$ax \in \ker(f)$.

Un subgp $I \subseteq A$ es un ideal de A si

$(a \in I, x \in A) \Rightarrow xa \in I$

n campo es un anillo ~~donde~~ que

sólo (0) y A son ideales.

-: Cualquier ideal $I \subseteq A$ es el núcleo
de un homomorfismo

$A/$ es un anillo.

ORGANIZANDO: A & B anillos conm con 1

$f: A \longrightarrow B$ homomorfismo: $\begin{cases} f(1_A) = 1_B \\ f(x+y) = f(x) + f(y) \end{cases}$

$f(xy) = f(x) f(y)$

Una A-álgebra es un anillo con un homomorfismo $A \longrightarrow B$.

Prop El núcleo de un homomorfismo $f: A \longrightarrow B$ es un subgrupo $(+)$ & $a \in \ker(f)$ & $x \in A$

$ax \in \ker(f)$.

Def.- Un subgp $I \subseteq A$ es un ideal de A si

$(a \in I, x \in A) \Rightarrow xa \in I$

Obs. Un campo es un anillo ~~donde~~ que sólo (0) y A son ideales.

Teorema. Cualquier ideal $I \subseteq A$ es el núcleo de un homomorfismo

Argumento: ⭑ A/I es un anillo.

$\ast$ $\pi : A \longrightarrow A/I$ es un homomorfismo con $\ker(\pi) = I$.

<u>Def.-</u> $A[x_1 \ldots, x_n]/I =: B$ ~~se~~ llamará A-álgebra de tipo finito ó finitamente generada.

<u>idea:</u> Cualquier ~~y~~ $\in B$ se puede expresar como

$$y = \cancel{a_1 x_1 + \cdots + a_n} \quad P(x_1 \ldots, x_n) \in A[x_1 \ldots, x_n]$$

los x_i's son los generadores.

<u>Prop</u> Si $A \xrightarrow{\pi} A/I$ homo cociente

si $J \subseteq A/I$ ideal $\Rightarrow \pi^{-1}(J)$ ideal

contiene a I.

si $I \subseteq m \subseteq A$ ideal $\Rightarrow \pi(m) \subseteq A/I$ ideal

denotado m/I

Def.- Un ideal generado por un número finito

1) de elementos se dice finitamente generado.

2) Un ideal generado por 1 elemento se dice principal.

Eg. $I \subseteq \mathbb{Z}$ ideal. ~~Es~~ I principal

$I \subseteq k[x]$ con k campo. I es principal.

Argumento $a \in I$ más pequeño ($|a| < |b|$ $\forall\, b \in I$)

$\Rightarrow \quad \langle a \rangle = I$

$p(x) \in I$ no cero con $\text{grado}(p) \leq \text{grado}(Q)$ $\forall\, Q \in I$

$\Rightarrow \quad I = \langle p(x) \rangle$.

Def.- Un dominio (no campo) tal que todos los ideales son principales es un DIP.

Operaciones con ideales.

$I, J \subseteq A$ ideales

$I \cap J \qquad I + J$ son ideales.

Def. $I, J \subseteq A$ ideales. $IJ = \{ab \mid \begin{smallmatrix} a \in I \\ b \in J \end{smallmatrix}\} \subseteq A$ es ideal.

Obs ~~Prop~~.- $A \xrightarrow{f} B$ homomorfismo. $J \subseteq B$ ideal

$\Rightarrow \quad f^{-1}(J) \subseteq A$ ideal

Argumento: $A \to B \to B/J$, $g: A \to B/J$

$$f^{-1}(J) = \ker(g) \Rightarrow \text{ideal}$$

Def. $f: A \to B$ homo. $I \subseteq A$ ideal

$$f(I)B = \{\sum x_i y_i \mid \begin{smallmatrix} y_i \in B \\ x_i \in f(I) \end{smallmatrix}\} \subseteq B$$

ideal generado por elementos de $f(I)$.

Def. $I \subseteq A$ ideal se dice primo si

A/I es dominio.

Prop. $I \subseteq A$ ideal primo ssi

$$ab \in I \text{ \& } a \notin I \Rightarrow b \in I.$$

Def: $I \subseteq A$ ideal se dice maximal si A/I es un campo.

Prop.

Los ideales primos de $\mathbb{Z}[x]$ son los siguientes:

$\langle 0 \rangle$; $\langle f \rangle$ con f irreducible en $\mathbb{Z}[x]$

y $m \subseteq \mathbb{Z}[x]$ ideal maximal.

Más aún, cada ideal maximal es de la forma $m = (f, p)$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo & f irred en $\mathbb{F}_p[x]$.

Argumento: $\mathbb{Z}[x]$ es dominio $\Rightarrow \langle 0 \rangle$ es ideal primo.

si $f \in \mathbb{Z}[x]$ es irreducible y

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{Z}[x]/\langle f \rangle$$

con $\bar{a} \neq 0$ & $\bar{b} \neq 0$

$\Rightarrow$

$$b, a \in \mathbb{Z}[x] \quad \& \quad a \notin \langle f \rangle \quad \& \quad b \notin \langle f \rangle$$

y $a \cdot b = gf \Rightarrow f \mid a \cdot b \Rightarrow a \in \langle f \rangle$

$\Rightarrow\Leftarrow$.