Álgebra Commutativa Feb 22

Ayer: Primos en extensiones enteras.

Hoy: Cayley-Hamilton.

<u>Teorema</u> $A \subset B$ extensión de anillos

$b_1, \dots, b_n \in B$ son integrales$/A$ ssi

$A[b_1, \dots, b_n]$ es finitamente generado como A-modulo.

<u>Argumento:</u> $\Rightarrow$) $b \in B$ integral$/A$.

i.e. $f(b) = 0$ con $f \in A[x]$ mónico $\deg \geq 1$.

Cualquier $g \in A[x]$ satisface

$$g(x) = q(x) f(x) + r(x)$$

con: * $\deg(r) < \deg(f) = n$ (1

* $q(x), r(x) \in A[x]$

Por lo tanto $g(b) = r(b)$

$= a_0 + \dots + a_{n-1} b^{n-1}$

$\Rightarrow$ $A[b]$ es generado por $1, \dots, b^{n-1}$!

Por inducción: $b_1, \dots, b_m \in B$ integrales/A

$\Rightarrow$ $A[b_1, \dots, b_m]$ = finitamente generado A-módulo.

Recíprocos: $A[b_1, \dots, b_m]$ fin generado A-módulo

$w_1, \dots, w_r$ generadores.

$\forall\, b \in A[b_1, \dots, b_m]$ tenemos

$$\begin{bmatrix} b\omega_1 = a_{11}\omega_1 + \cdots + a_{r1}\omega_r \\ b\omega_2 = a_{12}\omega_1 + \cdots + a_{r2}\omega_r \\ \vdots \\ b\omega_r = a_{1r}\omega_1 + \cdots + a_{rr}\omega_r \end{bmatrix} \qquad a_{ij} \in A$$

Con matrices:

$$\Big(b\,Id^r - (a_{ij})\Big)\omega_i = 0 \qquad i = 1, \dots, r$$

$$\overset{!}{\Longrightarrow} \qquad \underbrace{\det\Big(b\,Id^r - (a_{ij})\Big)}_{\begin{pmatrix} b-a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & b-a_{22} & \cdots & \\ & & \ddots & \end{pmatrix}}\omega_i = 0 \qquad i = 1, \dots, r$$

$$\begin{bmatrix} \text{en efecto} \quad AA^* = A^*A = \det A\, Id. \\ \Rightarrow \text{ si } \omega \in \ker A \Rightarrow \det A \cdot \omega = 0 \end{bmatrix}$$

puesto que $1 = c_1\omega_1 + \cdots + c_r\omega_r$

$$\Longrightarrow \qquad \underbrace{\det\Big(b\,Id^r - (a_{ij})\Big)}_{\in A[b]} = 0$$

y nos da una ecuación mónica para b con coefici en A.

Por tanto b es integral/A.

<u>Corolario</u>: Para dos enteros algebraicos a, b tenemos que a·b & a+b es un entero algebraico, i.e. $\mathcal{O}_K \subseteq K$ es un anillo.

<u>Recordatorio</u>: k campo $T: k^n \to k^n$ lineal

$$\cancel{\det(x_i I - (a_{ij})) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}$$
$$\cancel{= (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)}$$

$e_1, \ldots, e_r$ vectores propios de T

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Valores propios de T

$$\Rightarrow \quad (N - \lambda_i \, Id)e_i = 0$$

∴ Por lo tanto

$$(T-\lambda_1 \mathrm{Id})\cdots(T-\lambda_r \mathrm{Id}) = 0$$

es cero en $\mathcal{L}\{e_1, \dots, e_r\}$.

y entonces T satisface el polinomio

$min(x) := (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_r)$, i.e.

$$min(T) = 0 \qquad \text{(Cayley-Hamilton)}$$

<u>Teorema</u>: Cayley-Hamilton es válido sobre un anillo commutativo con 1.

Proposición: B un A-módulo fin generado.

para cualquier ideal $m \subseteq A$

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & | \\ m & \subseteq & A \\ \text{ideal} & & \end{array}$$

entonces $Bm \neq B$.

Argumento:

Asumamos $Bm = B$

entonces $\exists$ $b_{ij} \in m$ tal que

$$a_i = \sum b_{ij} a_j$$

con $a_1 \ldots a_r$ generadores de B/A.

$$\Rightarrow \det\left(Id - (b_{ij})\right) = 0$$

$$= 1 + (\text{variables } b_{ij})$$

$\Rightarrow 1 \in m$ contradicción