Álgebra Conmutativa 27 Feb

Ayer: Cayley-Hamilton

Hoy: Módulos libres (y no libres).

Considera $m_1, \dots, m_r \in M$
i.e. $Am_1 + \cdots + Am_r = M$.

$\Bigg\}$ generadores de M como A-módulo.

$\Rightarrow$

En un A-módulo finitamente generado siempre tenemos un homomorfismo (de A-mod)

$$\pi : A^r \twoheadrightarrow M, \quad \text{suprayectivo.}$$

$\{m_1, \dots, m_r\}$ es una base de M si π es un isomorfismo. En este caso $\underline{M}$ se dice libre de rango r.

Eg (Ideales no son módulos libres)

$$I = \langle x, y\rangle \underset{\text{ideal}}{\subseteq} k[x,y] = R$$

$\Rightarrow$

$$0 \longrightarrow \ker(\pi) \longrightarrow R^2 \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} I$$

$$\ker(\pi) \supseteq R\cdot(-y,x) \qquad (f,g) \longmapsto xf+yg$$

$$(-y,x) \longmapsto 0$$

Como $\ker(\pi) \neq 0$, entonces I no es un R-módulo libre.

Eg (Haz tangente de $\mathbb{P}^1$) $\quad R := k[x,y]$

E = cokernel de φ.

$$R \overset{\varphi}{\hookrightarrow} R^2 \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(\varphi) := E$$

$$h \longmapsto (xh, yh) \qquad \operatorname{coker}(\varphi) = R^2/\operatorname{Im}(\varphi)$$

E = R-módulo finitamente generado. y no es libre. (!?)

¿Es E un ideal de R?

Considerar L, M, N A-módulos

$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N$ se dice exacta

en M si $\mathrm{Im}(\alpha) = \ker(\beta)$. (esto implica $\beta \circ \alpha = 0$)

Una sucesión más larga

$\cdots \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to \cdots$ se dice <u>exacta</u>

si es exacta en cada término.

<u>Def.</u>– $\mathrm{Coker}(\alpha) := M / \mathrm{Im}(\alpha)$ cokernel de α.

con $\alpha : N \to M$.

<u>Importante</u>: $0 \to L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \to 0$

es exacta <u>ssi</u> $L \leq M$ & $N = M/L$

Una sucesión exacta de esta forma se llama:

<u>sucesión exacta corta</u>.

Ejemplo de módulos libres y no libres & sucesiones exactas.

(1)

La más importante: $I \subseteq R$ ideal

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/_I \longrightarrow 0$$

es exacta.

(2) $f \in \mathbb{Z}[x]$ irreducible, mónico & $\deg(f) \geq 1$

Entonces $\mathbb{Z}[x]/_{\langle f \rangle}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo. (un dominio también)

$$\shortparallel \qquad \searrow \{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\bar{x} + \cdots + \mathbb{Z}\bar{x}^{n-1}\}$$

si $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$

~~...~~ ~~...~~

Notar: $\mathbb{Z}^n \Longrightarrow \{(a_n, \ldots, a_1) \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}[x]/_{\langle f \rangle}$

$$(a_n, \ldots, a_1) \longmapsto \{a_n + a_{n-1}\bar{x} + \cdots + a_1 \bar{x}^{n-1}\}$$

generadores $\{1, \bar{x}, \ldots, \bar{x}^{n-1}\}$ $\qquad \pi$ es inyectivo