<u>Ayer</u>: Reciprocidad cuadrática

Hoy: $Hom(M,N)$ & módulos Noetherianos

N, M ambos A-módulos

<u>Def.</u>- $Hom_A(M,N)$ es el conjunto de todos los homomorfismos de M en N.

<u>Obs.</u>- $Hom_A(M,N)$ es un A-módulo. $\begin{cases}(f+g)a \\ af+ag\end{cases}$

<u>Notar</u> $Hom(N,M)=0$ aún con $\overset{\neq 0}{M}, N \neq 0$

Eg. $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}) = 0$

<u>Def.</u>- El A-módulo $M^\vee = Hom_A(M,A)$ se dice el dual de M.

Eg el dual de $\mathbb{Z}/p$ como $\mathbb{Z}$-módulo es zero.

posdoct@dgapa.unam.mx

Observación importante: $\mathrm{Hom}_A(*, A)$ es funtorial: (contravariante)

1) $\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow{\scriptstyle \pi\circ f} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ A & & A \end{array} \Rightarrow \mathrm{Hom}(M, A) \longleftarrow \mathrm{Hom}(N, A)$

$f\circ\pi \longleftarrow\!\!| \quad \pi$

i.e. $M^\vee \longleftarrow N^\vee$

Ej. $I = \langle xy, xz, yz \rangle \subseteq k[x, y, z]$

$$0 \longrightarrow R^2 \xrightarrow[\begin{pmatrix} -z & 0 \\ 0 & -y \\ x & x \end{pmatrix}]{\varphi} R^3 \xrightarrow[(xy,\, xz,\, yz)]{\pi_0} I \longrightarrow 0 \qquad \underline{\underline{\text{exacta}}}$$

$$\mathrm{Ker}(\pi_0) = \left[\begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ x \end{pmatrix} \right] \qquad (xy, xz, yz)\begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = 0$$

$$(xy, xz, yz)\begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ x \end{pmatrix} = 0$$

Tomando $\mathrm{Hom}(*, R)$:

$$R^{2\vee} \xleftarrow[\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}]{\varphi^\vee} R^{3\vee} \longleftarrow \mathrm{Hom}(I, R) \qquad ¿\text{exacta}?$$

$\mathrm{Ker}(\varphi^\vee) = \langle xy, xz, yz \rangle$

Veamos a dónde va f_1 generador $(1,0,0)$ de $R^{3\vee}$

$$\begin{tikzcd} R^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} -z & 0 \\ 0 & -y \\ x & x \end{pmatrix}", "\varphi"'] & R^3 \arrow[d, "f_1^\vee"] & f_1 \arrow[d, mapsto] \\ & R & 1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} -z & 0 \\ 0 & -y \\ x & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$(-ze_1, -e_2 y, x(e_1+e_2))$$

i.e. $f_1 \longmapsto -ze_1$

$$R^{3\vee} \xrightarrow[\varphi^\vee]{\begin{pmatrix} -z & 0 & x \\ 0 & -y & x \end{pmatrix}} R^{2\vee}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Ker}\varphi^\vee &= \left\langle \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ yz \end{pmatrix} \right\rangle \leq R^{3\vee} \cong R^3 . \\ &= \operatorname{Hom}(I,R) = I^\vee \quad (\text{dual de } I) \end{aligned}}$$

Obs.

$$0 \to I^\vee \to R^3 \xrightarrow{\varphi^\vee} R^2 \to \overset{\neq 0}{\operatorname{coker}(\varphi^\vee)} \to 0$$

¡no es exacta corta!

(5

Eg. (haz normal de un pt en $\mathbb{P}^2$) $\quad I = \langle x, y \rangle \subseteq k[x,y,z]$
$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}\; R$$

$$\mathrm{Hom}_R(I, R/I) = \mathrm{Coker}\,(x \;\; y) \subseteq R$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & R & \xrightarrow[\varphi]{\binom{x}{y}} & R^2 & \longrightarrow & I & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow \pi & & & \\ & R/I & & R & & & \\ & & & \downarrow p & & & \\ & & & R/I & & & \end{array}$$

¿libre?
¿ideal?

Como anillo
$$R/I \cong k[z]$$

$$I \longrightarrow k[z] = R/I$$
$$fx + gy \longmapsto ?$$

<u>Def</u> ~~si~~ ~~el~~ conjunto de ideales en un anillo R satisface que cualquier sucesión creciente de ideales

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_k$$

se estabiliza, se dice a R <u>Noetheriano</u>.