

(1)

Teorema R es Noetheriano ssi
todos sus ideales son finitamente
generados.

Argumento: Asumamos R Noetheriano &
 $I \subseteq R$.
ideal

$$E_I = \left\{ \begin{array}{l} \text{ideales finitamente} \\ \text{generados contenidos} \\ \text{en } I \end{array} \right\} \neq \emptyset$$

ordenado?

$J \in E_I$ elemento maximal \leftarrow
¿EXISTE?

$J \subseteq I$ por construcción, mostremos la
contención inversa.

si $a \in I$, entonces $J + R \cdot a \in E_I$

\Rightarrow
maximalidad

$$R \cdot a + J = J$$

(2)

$\Rightarrow a \in J$ y por tanto $J = I$.

Asumamos ahora todos los ideales son finitamente generados. si

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_k \subseteq \dots \quad \text{sucesión creciente.}$$

$\Rightarrow \bigcup_{k \geq 1} I_k = J$ es un ideal.

Considerar $\{r_1, \dots, r_n\}$ generadores de J . $\exists m$

tal que $r_1, \dots, r_n \in I_m \Rightarrow J = I_m$ y

por tanto $I_n = I_m$ si $n \geq m$ □

————— " —————

Teorema (Hilbert) Si A es Noetheriano (3)
entonces $A[x]$ es Noetheriano.

Argumento: $J \subseteq A[x]$ ideal, \rightarrow

Estrategia \rightarrow

Veamos que es
finitamente generado.

$$I_n = \left\{ a_i \in A \mid \exists \text{ elemento en } J, \text{ digamos } P, \right. \\ \left. \begin{array}{l} \text{con } \text{coef}(P) = a \\ \& \text{deg}(P) = n. \end{array} \right\}$$

Notar: $I_n \subseteq I_{n+1}$ pues $f \in J \Rightarrow xf \in J$

sucesión creciente
de ideales en A .

Entonces $I_n = I_m$ si $n > m$ para algún m .

Para cada $i \leq m$, considerar los generadores

$$\text{de } I_i: (a_{i,1}, \dots, a_{i,m_i}).$$

Consideremos

$$\left\{ (P_{0i_1}, \dots, P_{0i_m}) \mid \begin{array}{l} \deg(P_{i,j}) = i \\ \text{Coef}(P_{i,j}) = a_{i,j} \end{array} \right\}$$

Para todo $i \leq m$.

Afirmación: El conjunto de arriba (para todos $i \leq m$) genera a J , & es finito.

Inducción:
(en $\deg(P)$
para algún $P \in J$)

si $\deg(P) = 0$ para algún
 $P \in J$

entonces

$$P = a_{0,1}A + \dots + a_{0,m}A \in I_0$$

el cual es fin generado pues A es Noetheriano.

si $\deg(P) = t > 0$ & $a = \text{Coef}(P) \in A$

$t \leq m$, \exists la descomposición ($a \in I_t$ el cual es fin gen)

$$a = b_1 a_{t,1} + \dots + b_{m_t} a_{t,m_t}$$

Observamos

$$P = (b_1 P_{t_1} + \dots + b_{m_t} P_{t_{m_t}})$$

$\in A[x]$

$$= P = (b_1 a_{t_1} + \dots + b_{m_t} a_{t_{m_t}}) x^t + (\text{términos de grado } < t)$$

$$= (\text{términos de grado } < t) \leftarrow \text{este polinomio en } J$$

Se puede expresar como combinación finita de $\{P_{i,j}\}$ por inducción.

$\Rightarrow P$ es combinación lineal finita de los $\{P_{i,j}\}$.

si $t > m$, $\text{coef}(P) = a \in I_t$ y existe

$$a = b_1 a_{m_1} + \dots + b_m a_{m_m}$$

Repetimos el argumento anterior.



CORO: A noetheriano, entonces
 $A[x_1, \dots, x_m]$ es noetheriano. (6)

CORO: $I \subseteq k[x_0, \dots, x_m]$ ideal.

$$V(I) := \left\{ (a_0, \dots, a_m) \in k^m \mid \begin{array}{l} f(a_0, \dots, a_m) = 0 \\ \forall f \in I \end{array} \right\} \subseteq k^m$$

entonces $V(I) = V(g_1) \cap \dots \cap V(g_r)$ donde

g_1, \dots, g_r son generadores de I . □

Notas:

Todos los conjuntos algebraicos en k^m no vacíos
son los ceros de un número finito de
ecuaciones.

Notas) si $Z \subseteq k^m$ conjunto no vacío.

$$I(Z) = \left\{ f \in k[x_1, \dots, x_m] \mid \begin{array}{l} f(z) = 0 \\ \forall z \in Z \end{array} \right\} \subseteq k[x_1, \dots, x_m]$$

ideal

Este ideal podría ser $(0) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$
(si z no es algebraico)

Def. El conjunto de ceros ^{en k^n} de un número finito de polinomios en $k[x_1, \dots, x_n]$ se dice algebraico.

v.e. $P_1, \dots, P_r \in k[x_1, \dots, x_n]$

$$Z(P_1, \dots, P_r) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid \begin{array}{l} P_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \forall i=1, \dots, r \end{array} \right\}$$

Conjunto algebraico

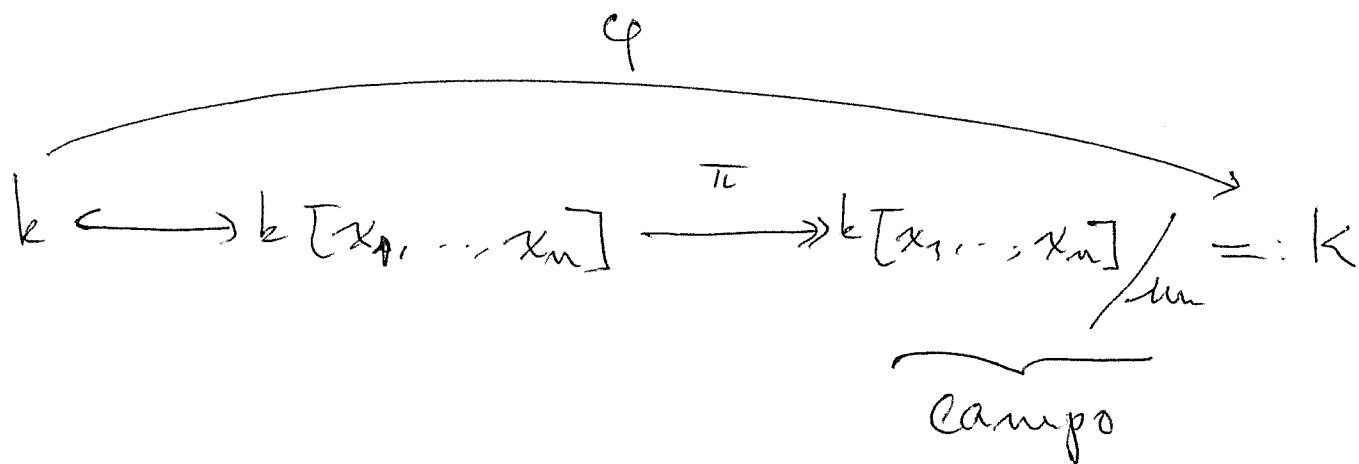
Nota(1): si $Z \neq \emptyset \Rightarrow I(Z) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ ideal \neq total

$$\boxed{k = \overline{k}}$$

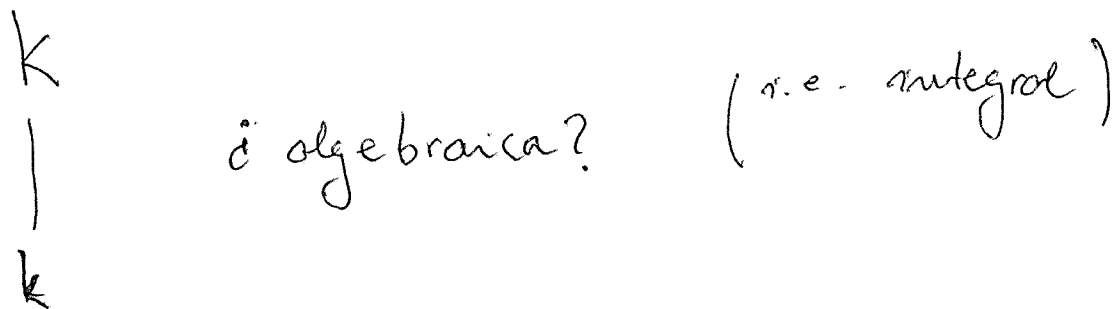
Teorema: si $I \subsetneq k[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow Z(I) \neq \emptyset$.

Argumento: I ideal propio. $\exists m \supseteq I$ maximal.

1) $Z(m) \subset Z(I)$ tenemos que
 $Z(m) \neq \emptyset$.



Tenemos una extensión de campos



Algebraica $\implies_{k=\bar{k}}$ $k = K$. $b_i := x_i \pmod{\mathfrak{m}} \in k$
 $d_i := \varphi^{-1}(b_i) \in k$

$\implies x_i - d_i \in \ker(\pi)$ para cada $i=1, \dots, m$.

Por tanto

← ideal maximal!

$$\langle x_1 - d_1, \dots, x_m - d_m \rangle \subseteq \ker(\pi) = \mathfrak{m}$$

$$\Rightarrow \langle x_1 - \alpha_1, \dots, x_m - \alpha_m \rangle = \mathfrak{m}$$

$$\gamma \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in Z(\mathfrak{m}) \subseteq k^n$$

$$\neq \emptyset$$



Falta mostrar que $k = k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m]$ es algebraica.
i.e. cada x_i es alg/k

Tarea: $A \subseteq B$ extensión entera de anillos
 A es campo ssi B es campo.