UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Álgebra conmutativa: tarea 3

Fecha de entrega: 22 de febrero, 2023

EJERCICIO 1

Considerar k un campo y $(a_1,\ldots,a_n)\in k^n$. Mostrar que los polinomios $P\in R=k[x_1,\ldots,x_n]$ tal que $p(a_1,\ldots,a_n)=0$ forman un ideal maximal de R generado por $x_1-a_1,\ldots,x_n-a_n$.

EJERCICIO 2

Mostrar que los ideales primos diferentes de cero en un DIP son maximales. Además, mostrar que un DIP es un dominio de factorización única.

EJERCICIO 3

Considerar la inclusión $f:A\to A[x]$. Si $I\subset A$ es un ideal primo, mostrar que el ideal $f(I)A[x]$ del anillo de polinomios $A[x]$ es primo. Cuando $A=\mathbb{Z}$ y $p\in A$ primo, ¿qué ideal es $f(p)\mathbb{Z}[x]$?

EJERCICIO 4

Considerar $f:A\to B$ homomorfismo de anillos. Mostrar que la imagen inversa f^{-1} manda ideales primos en ideales primos. En particular, si $A\subset B$ y $P\subset B$ es ideal primo, entonces

$$P\cap A=(p)$$

es un ideal primo de A. ¿Lo mismo aplica para ideales maximales? Argumentar o exhibir un contra ejemplo.

Argumentar a favor o en contra

Considerar una inclusión entera de anillos $A \subset B$. Si $P \subset B$ es un ideal primo, entonces es maximal si y solo si $P \cap A$ es un ideal maximal.

Ejercicio 6

Considerar $exp(2\pi i/5) = \zeta$ una raíz quíntica primitiva de 1. Si $\mathbb{Q}(\zeta)$ denota la extensión de campo de $\mathbb{Q}$, y

$$\mathscr{O} \subset \mathbb{Q}(\zeta)$$

denota el anillo de enteros algebraicos, ¿qué descripción tienen los ideales primos de $\mathscr{O}$? ¿Existen ideal primos en $\mathscr{O}$ que no sean maximales?