UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Álgebra conmutativa: tarea 4

Fecha de entrega: 29 de febrero, 2023

ARGUMENTAR A FAVOR O EN CONTRA

Denotemos por $\mathcal{O}_K$ al anillo de enteros algebraicos del campo ciclotómico $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, donde p es primo impar. Del Lema de Nakayama se deduce $\mathcal{O}_K$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre y que una $\mathbb{Z}$-base es:

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\zeta + \cdots + \mathbb{Z}\zeta^{p-1}.$$

EJERCICIO 2

Considerar el anillo de polinomios $R = \mathbb{C}[a,b,c]$. El ideal maximal $m = (a,b,c)$ es un R-módulo generado por los 3 monomios a,b,c. Por lo tanto existe un homomorfismo de R-modulos suprayectivo $\phi : R^3 \to m \subset R$ definido como

$$(f,g,h) \mapsto af + bg + hc.$$

ϕ tiene núcleo, $N_1 := ker(\phi)$, y está generado por 3 elementos $v,u,w \in R^3$. Por ejemplo, $v = (-a,b,0)$. Encontrar el núcleo de $\psi : R^3 \to N_1$, y deducir que existe una sucesión exacta

$$0 \to R \to R^3 \xrightarrow{\psi} R^3 \xrightarrow{\phi} m \to 0.$$

Moraleja: el ideal m no es un R-modulo libre, pero yace en una sucesión exacta de libres.

EJERCICIO 3

Considerar (A, m) un anillo local, *i.e.* A tiene un único ideal maximal m. Si M es un A-módulo finitamente generado y $s_1, \dots, s_n \in M$, escribamos $\overline{s}_1, \dots, \overline{s}_n \in M/mM$ sus imágenes en el A-módulo cociente. Mostrar que $\overline{s}_1, \dots, \overline{s}_n$ son una base del espacio vectorial M/mM si y sólo si $s_1, \dots, s_n$ son una base minimal de M.

EXAMEN GENERAL: JULIO 2021

Considerar una extensión de anillos $A \subset B$ tal que B es entero sobre A. Mostrar que

$$A \cap B^* = A^*$$

donde A^* denota el grupo de unidades de A.

EJERCICIO 5

Consideremos $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_0 \in A[x]$. Mostrar que $A[x]/(p)$ es un A-módulo libre de rando n y escribir una base.

ARGUMENTAR A FAVOR O EN CONTRA

Considerar $p, q \in \mathbb{Z}$ primos distintos impares. Denotar $l = (-1)^{(p-1)/2} p$. Entonces,

$$q\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_K \quad \text{escinde si y solo si} \quad q\mathcal{O}_L \subset \mathcal{O}_L \quad \text{escinde,}$$

donde $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ y $L := \mathbb{Q}(\sqrt{l})$. Más aún, si $q\mathcal{O}_K$ escinde, lo hace en un número par de ideales primos.