UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Álgebra conmutativa: tarea 6

Fecha de entrega: 15 de marzo, 2023

EJERCICIO 1

Considerar M, N ambos A-módulos libres de rango m, n, respectivamente con $m < n$ y A un anillo local. Si ϕ es un homomorfismo

$$M \xrightarrow{\phi} N,$$

entonces encontrar condiciones necesarias y suficientes para que el cokernel $coker(\phi)$ sea libre de rango $n - m$. ¿Es cierto este enunciado si A no es local?

ARGUMENTAR A FAVOR O EN CONTRA

Considerar la sucesión exacta corta de A-módulos

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

donde F es libre. Si L es un A-módulo, entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow Hom_A(F, L) \longrightarrow Hom_A(N, L) \longrightarrow Hom_A(M, L) \longrightarrow 0.$$

EJERCICIO 3

Considerar el ideal principal $F := (f) \subset R := k[x_0, \ldots, x_n]$ como un R-módulo. Mostrar que el módulo dual $F^\vee$ es libre de rango 1.

EJERCICIO 4

Si $R := k[x_0, \dots, x_n]$, entonces considerar dos R-módulos finitamente generados N, M y un homomorfismo entre ellos $f : M \to N$. Mostrar cómo calcular un conjunto de generadores para el kernel de f.

EJERCICIO 5

Considerar el ideal $I = (x, y) \subset R := k[x, y, z]$.

1. Calcular una presentación para el R-módulo
$$I^\vee = Hom_R(I, R/I).$$
2. Dado que $I^2 \subset I$, esta inclusión induce un homomorfismo $Hom_R(I, R/I) \to Hom_R(I^2, R/I)$ ¿cuál es la imagen?

HAZ TANGENTE DEL ESPACIO $\mathbb{P}^2$

Considerar el anillo $R := k[x, y, z]$ y denotemos por Ω al kernel[1] del homomorfismo de R-módulos $\phi(f, g, h) = (xf + yg + zh)$

$$0 \longrightarrow \Omega \longrightarrow R^3 \xrightarrow{\phi} R.$$

1. Calcular una presentación del dual $\Omega^\vee$.
2. ¿ Es Ω libre?
3. ¿Es Ω isomorfo a su dual $\Omega^\vee$?

[1] ver, Hartshorne, pag. 173. Theorem 8.13