Álgebra Moderna III : 30 octubre

Clase pasada: Ejemplos de grupos de Galois.

Hoy: Ecuaciones abelianas

¿Son todos los números algebraicos expresiones anidadas de radicales?

Abel: Si todas las raíces de una ecuación de grado arbitrario están relacionadas entre sí de tal forma que todas ellas se pueden expresar racionalmente mediante una de ellas α, y si además siempre que denotemos a dos de ellas como

$\theta_1(\alpha)$, $\theta_2(\alpha)$ uno tiene que

$$\theta_1 \theta_2 (\alpha) = \theta_2 \theta_1 (\alpha),$$

entonces la ecuación a la que pertenecen es soluble por radicales.

$\hookrightarrow$ Traducción: si $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son raíces de f y están relacionadas por expresiones racionales de una de ellas, α.

entonces

$$\begin{array}{c} L = \text{campo de descomposición de } f = F(\alpha) \\ | \\ F. \end{array}$$

Ejemplo: $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ $\quad f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$

$$f = (x - \alpha)(x + \alpha)(x - 10\alpha + \alpha^3)(x + 10\alpha - \alpha^3).$$

$\theta_1(x) = x \qquad \theta_2(x) = -x$

$\theta_3(x) = -10x + x^3 \qquad \theta_4(x) = 10x - x^3$

↳ Estas funciones NO son automorfismos del campo $F(\alpha)$.

↳ por ejemplo $\theta_2(ab) = -ab$
$\neq \theta_2(a)\,\theta_2(b)$

Afirmación $\theta_i(\theta_j(\alpha)) = \theta_j(\theta_i(\alpha)) \qquad 1 \leq i, j \leq n$

Teorema: El grupo de Galois de un polinomio que origina una ecuación abeliana es abeliano.

Demostración:

si $f \in F[x]$ y $f=0$ abeliana,

entonces $L =$ campo de descomposición de f $= F(\alpha)$ con $f(\alpha)=0$

además tenemos $\theta_j \in F(x)$ $\quad 1 \leq j \leq n$

tal que $\theta_j(\alpha)$'s son raíces de f.

Escribamos $\sigma, \tau \in Gal(L \setminus F)$ entonces

1) $\sigma(\alpha) = \theta_i(\alpha) \qquad \tau(\alpha) = \theta_j(\alpha)$ para algún i, j

2) $\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma$ ssi $\sigma(\tau(\alpha)) = \tau(\sigma(\alpha))$

3) $\sigma(\tau(\alpha)) = \theta_i(\theta_j(\alpha))$ &

$\tau(\sigma(\alpha)) = \theta_j(\theta_i(\alpha))$

∎

Observación: Supongamos $Gal(f)$ abeliano con $f \in F[x]$. Si $L = \text{campo de descomposición de } f = F(\alpha)$ con $f(\alpha)=0$, entonces $f=0$ es una ecuación abeliana. (¿por qué?)

Expresiones cantidades de radicales

Eg. $\sqrt{17+\sqrt{34}} + \sqrt{34+\sqrt{17}-\sqrt{2}} = \alpha$

Eg. $\zeta_{17} =$ 17-tima raíz de (primitiva) la unidad

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\zeta_{17}) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array} \qquad Gal = \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} = \text{cíclico} \qquad \begin{array}{c} \mathbb{Q}(\zeta_{17}) \\ | \\ \mathbb{Q}(\alpha) \\ | \\ \mathbb{Q}(\beta) \\ | \\ \mathbb{Q}(\gamma) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

$$e \lhd \mathbb{Z}/2 \lhd \mathbb{Z}/4 \lhd \mathbb{Z}/8 \lhd \mathbb{Z}/16$$

$$\mathbb{Z}/16 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

$$\alpha = \zeta + \zeta^{-1} \qquad \mathbb{Z}/2 = \{1, -1\}$$

$$\beta = \zeta + \zeta^{4} + \zeta^{-4} + \zeta^{-1} \qquad \mathbb{Z}/4 = \{1, 4, -4, -1\}$$

$$\gamma = \dots$$

entonces del grupo $\mathbb{Z}/16$ podemos detectar subcampos de $\mathbb{Q}(\zeta)$.

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Q}(\zeta) & \\ \quad | & \big\rangle G_1 \\ \mathbb{Q}(\alpha) & \\ \quad | & \big\rangle G_2 \\ \mathbb{Q}(\beta) & \\ \quad | & \\ \mathbb{Q}(\sigma) & \\ \quad | & \\ \mathbb{Q} & \end{array}$$

Defi.- $E \setminus F$ extensión finita con $Gal(E \setminus F)$

Dado $H < Gal(E \setminus F)$

llamamos a $E_H = \{\alpha \in L \mid \sigma(\alpha) = \alpha \ \forall \sigma \in H\}$

campo fijado por H.