Geometría de curvas algebraicas: 28 enero

Teorema: Existe polinomio de grado 5, $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ que no es soluble por radicales.

Cuando $p(x)$ no es soluble por radicales:

¿Qué podemos decir de sus raíces?

¿Podemos escribir las raíces usando funciones más generales que solo radicales?

¿Podemos escribir explícitamente las quínticas que sí son solubles por radicales?

——— " ———

→ Esta pregunta tiene respuesta afirmativa

Es lo primero que veremos.

Hecho: $p \in \mathbb{Q}[x]$ polinomio quíntico irreducible.

$$\Rightarrow \quad Gal(p) := Gal < S_5$$

subgrupo transitivo.

Subgrupos transitivos de S_5:

$*$ S_5 orden 120 $\qquad$ $*$ A_5 orden 60

$*$ $\langle 12345\rangle \cong \mathbb{Z}/5$ cíclico de orden 5.

$*$ $AGL(1,\mathbb{F}_5) = \left\{ T(z) = az+b \;\middle|\; \begin{array}{l} a\in\mathbb{F}_5^* \\ b\in\mathbb{F}_5 \end{array} \right\}$

orden 20

$*$ $AGL(1,\mathbb{F}_5)\cap A_5 \supseteq \langle 12345\rangle$

orden 10

$\cong D_{10}$ grupo diedrico de orden 10.

Subgrupos transitivos de S_5 hasta por conjugación.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & S_5 \arrow[dl] \arrow[d] \\
AGL(1,\mathbb{F}_5) \arrow[d] & A_5 \arrow[dl] \\
AGL(1,\mathbb{F}_5)\cap A_5 \arrow[d] & \\
\langle 12345\rangle &
\end{tikzcd}$$

COROLARIO: $f \in k[x]$ irreducible de grado 5. $Ch(k)=0$. f es soluble por radicales ssi

$$Gal(f) < \underbrace{AGL(1, \mathbb{F}_5)}_{\text{orden } 20}.$$

Nota: Se puede pensar en generalizar y reemplazar el 5 por un primo. [Referencia]

Eg: $f(x) = x^5 + 15x + 12 \in \mathbb{Q}[x]$

$$Gal(f) \cong AGL(1, \mathbb{F}_5).$$

Además, $f(\alpha) = 0$ con

$$\alpha = \left(\frac{-75 \pm 21\sqrt{10}}{125}\right)^{1/5} + \left(\frac{225 \mp 72\sqrt{10}}{125}\right)^{1/5}.$$

Representantes cosets izquierdos ——— " ———: e, (123), (234), (345), (145) (125)

Resolvente:

queremos → $h \in \mathbb{Q}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5]$

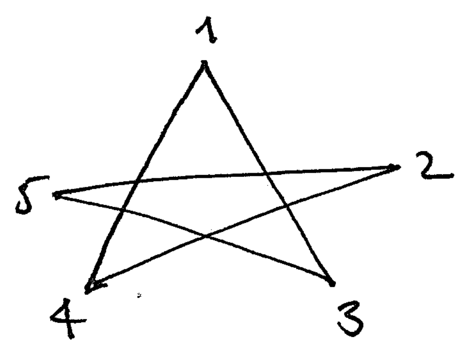
tal que

$$AGL(1, \mathbb{F}_5) = \{\sigma \in S_5 \mid \sigma \cdot h = h\}$$

(pensando α_i como raíces)

Hecho: $h = u^2$ donde

$$u = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 - x_1x_3 - x_3x_5 - x_5x_2 - x_2x_4 - x_4x_1$$



Notación

$h \cdot e$, $h_1 = h \cdot (123)$; $h_2 = h \cdot (234)$

$h_3 = h \cdot (345)$; $h_4 = h \cdot (145)$; $h_5 = h \cdot (125)$

Si escribimos

$$f = x^5 - c_1 x^4 + c_2 x^3 - c_3 x^2 + c_4 x - c_5$$

entonces la <u>resolvente</u> de f es:

$$\theta_f(y) = \prod_{i=1}^{6} (y - \beta_i) \qquad \in \mathbb{Q}[y]$$

$$\beta_i = h_i(\alpha_1 \dots \alpha_5)$$

raíces de f

<u>Proposición</u>: f como arriba

$$\theta_f(y) = (y^3 + b_2 y^2 + b_4 y + b_6)^2 - 2^{10} \underbrace{\Delta(f)}_{\text{discriminante de } f.} y$$

con $b_2, b_4, b_6 \in \mathbb{Q}$.

<u>Teorema</u>: $\Delta(f) \in \mathbb{Q}^2 \iff Gal(f) \subseteq A_5$

$Gal \xhookrightarrow{\cong} AGL(1, \mathbb{F}_5) \iff \theta_f$ tiene raíz en $\mathbb{Q}$

Eg: $f = x^5 - 6x + 3 \quad / \mathbb{Q}$.

no es cuadrado & $\left\{ \begin{array}{l} \Delta(f) = -1737531 \\ \Theta_f(y) = (y^3 + 120y^2 + 8640y - 69120)^2 + 2^{10}\Delta(f) \end{array} \right.$

no tiene raíz racional $\Rightarrow$ $Gal(f) \cong S_5$.

——— // ———

¿ $\Delta(f)$ cuadrado?	¿ $\Theta_f(f)$ tiene raíz en $\mathbb{Q}$?	¿ $\mathbb{Q}(\alpha)$ es el campo de desc?	$Gal(f)$ hasta por conj.
NO	NO	—	S_5
sí	NO	—	A_5
NO	sí	—	$AGL(1, \mathbb{F}_5)$
sí	sí	NO	$AGL(1, \mathbb{F}_5) \cap A_5$
sí	sí	sí	$\mathbb{Z}/5$