Geometría de curvas algebraicas

10 marzo

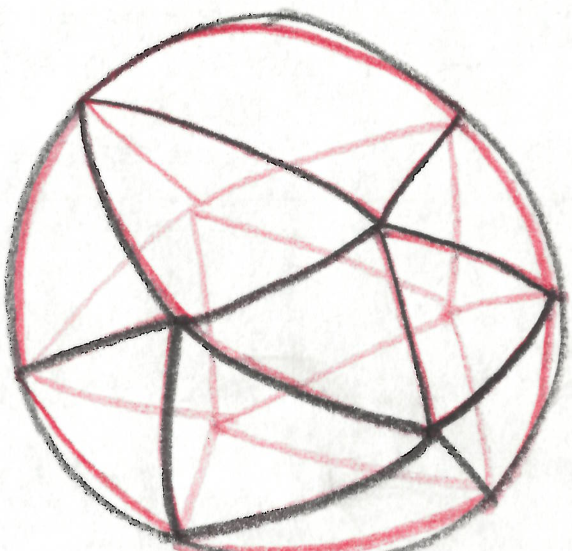
Hoy: Simetrías del icosaedro

&

cubiertas ramificadas.

Γ = rotaciones del icosaedro

$|\Gamma| = 60$

$I =$ 

actua en I con estabilizadores

de orden 3 en los centros de las caras

2 en los centros de las aristas

5 en los vértices de I.

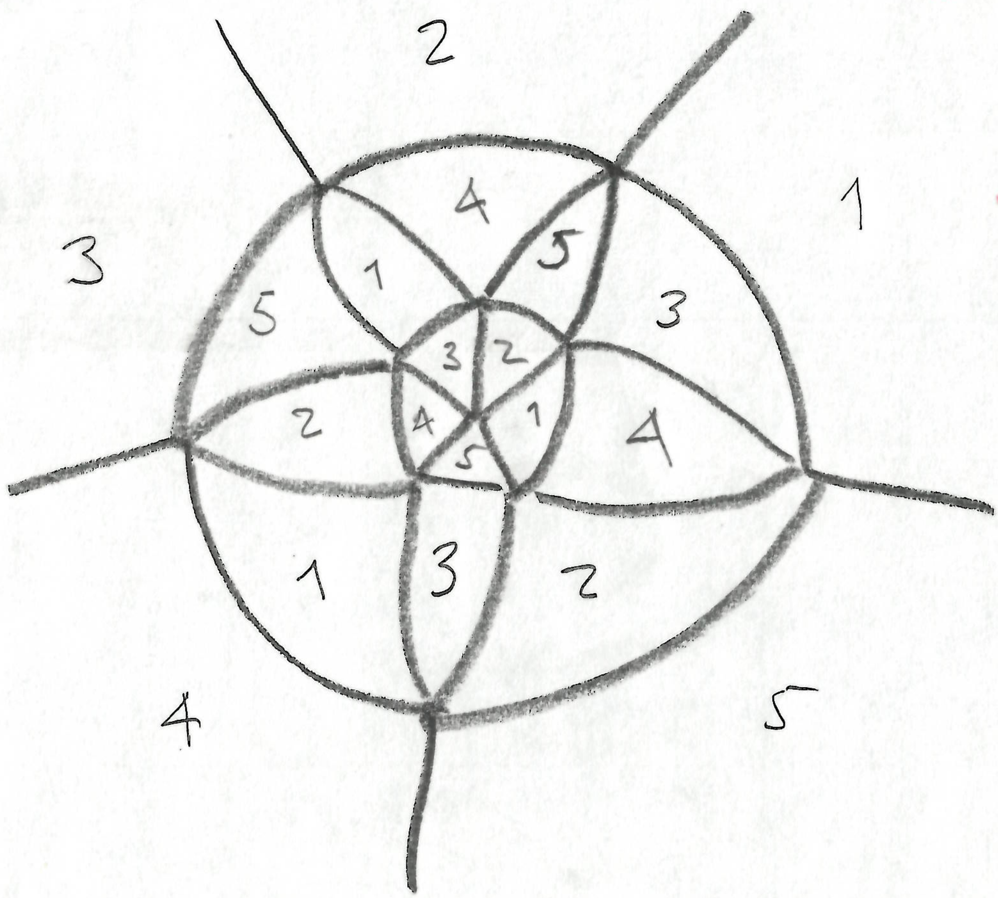
si pensamos en $T \hookrightarrow \mathbb{P}SL(2,\mathbb{C})$

tenemos generadores

$$S = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \qquad T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -(\varepsilon-\varepsilon^4) & \varepsilon^2-\varepsilon^3 \\ \varepsilon^2-\varepsilon^3 & \varepsilon-\varepsilon^4 \end{pmatrix}$$

donde $\varepsilon = e^{2\pi i/5}$.

Proyectando al plano



$S = (12345)$

$T = (12)(34)$

Deseamos entender el morfismo:

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1/\Gamma \cong \mathbb{P}^1$$

cubriente ramificado. Para ello, deseamos escribir el isomorfismo

$$\mathbb{P}^1/\Gamma \cong \mathbb{P}^1, \quad \text{i.e}$$

queremos escribir $k[z_1;z_2]^\Gamma$ álgebra de invariantes

¿Cómo es la acción de Γ en $\mathbb{P}^1$?

libre, excepto: Vértices $(|\mathrm{Stb}(\Gamma)| = 5)$

puntos medios de las aristas $|\mathrm{Stb}(\Gamma)| = 2$

puntos medios de las caras $|\mathrm{Stb}(\Gamma)| = 3$

Cada una de estas órbitas excepcionales son los ceros de un polinomio invariante.

Vértices: $f(z_1, z_2) = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10})$

<u>observar</u>, si f, g son Γ-invariantes en $k[z_1, z_2]$

entonces
$$\mathcal{H}(f) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \quad \& \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\mathrm{Jac}(f, g) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}$$

son también invariantes.

Escribamos,
$$H = \frac{1}{121}\mathcal{H}(f) \quad \& \quad T = \frac{1}{20}\mathrm{Jac}(f, H)$$

Puntos medios de caras : H & puntos medios de aristas : T

$\deg(H) = 20$ $\qquad$ $\deg(T) = 30$

<u>Afirmación</u>: $\langle H^3, T^2 \rangle = \left(k[z_1, z_2]^{\Gamma}\right)_{60}$ base

como espacios vectoriales.

Argumento: $p \in \left(k[z_1, z_2]^{\Gamma}\right)_{60}$ se anula

en una orbita única. Consideremos $aH^3 + bT^2$

para $a, b \in k$ no zero. $\left[\langle H^3, T^2 \rangle \subseteq (\;)^{\Gamma}\right] \in \left(k[z_1, z_2]\right)_{60}$

podemos elegir a_0, b_0 tal que $a_0H^3 + b_0T^2$ tenga

una raiz de p $\Rightarrow$ $a_0H^3 + b_0T^2 = p$ pues

estamos suponiendo que $a_0H^3 + b_0T^2$ es T-invariante

y sus raices viven en k. $(\Rightarrow)$ ✓

<u>Corolario</u>: $aH^3 + bT^2 = cf^5$ para algunos a, b, c k^*.

evaluando en $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ obtenemos restricciones para los valores de a, b, c.

<u>Tarea</u>: $a = b = 1$ $c = 1728$.

para cualquier $p \in k[z_1, z_2]^\Gamma$ podemos escribir

$$p = c f^{e_1} H^{e_2} T^{e_3} \prod_j (a_j H^2 + b_j T^3)$$

por tanto obtenemos un morfismo

$$k[z_1, z_2]^\Gamma \xrightarrow{\varphi} k[x, y, z] \Big/ (1728 x^5 - y^2 - z^3)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} gr(x) = 12 \\ gr(y) = 30 \\ gr(z) = 20 \end{array}}$$

Afirmación: φ es un isomorfismo de anillos graduados.