# Geometría Algebraica I

15 feb

Hoy: ¿Qué tipo de geometría estudiaremos?

---

<u>Definición</u>: (geometría de incidencia) Un conjunto cuyos puntos, junto con un conjunto de subconjuntos llamados líneas, que satisfacen (I), (II) y (III) será llamado una geometría de incidencia.

I) Por cualesquiera dos puntos A y B $\exists!$ línea conteniendo A y B.

II) Toda línea contiene al menos 2 puntos.

III) Existen 3 puntos no colineales.

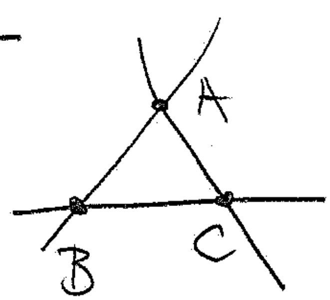
Un <u>modelo</u> de este sistema de axiomas es la realización de los objetos indefinidos como <u>PUNTO</u>.

<u>EJEMPLO</u>: $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\text{puntos} = \{(a,b)\}$$

$$\text{líneas} = \{(x,y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \;;\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

<u>EJEMPLO</u>




puntos

$\{A, B, C\}$

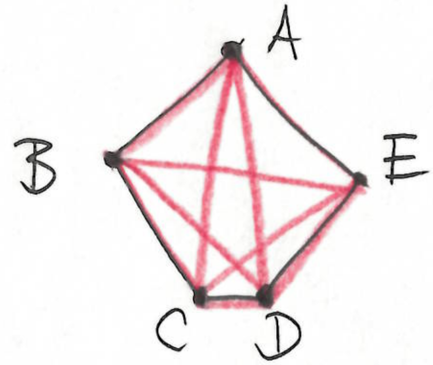
$\text{Líneas} = \{*, \star\}$.

<u>Definición</u>: Dos líneas son paralelas si no tienen puntos en común.

Históricamente [illegible]

**AXIOMA** (P): Para cada punto A y cada línea $l$, existe <u>a lo más</u> una línea que contiene a A paralela a $l$. (una línea es paralela a ella misma)

<u>NO</u> EJEMPLO:




$\{A, B, C, D, E\}$

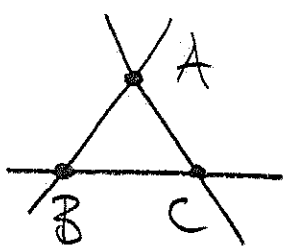
Satisface (I) (II) y (III)

NO satisface (P).

<u>Comentario</u>: (P) por lo tanto <u>NO</u> se puede deducir de I, II, III.

<u>Definición</u>: Un automorfismo de una geometría de incidencia es una aplicación 1-1 & sobreyectiva de ella en sí misma (en puntos) que preserva líneas.

<u>EJEMPLO</u>:

$G =$ 


$$\{1, 2, 3\} \to \{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)\}$$

$$\Rightarrow S_3 = \mathrm{Aut}(G).$$

---

<u>EJEMPLO</u>: (Plano Cartesiano sobre un campo $\mathbb{F}$)

$$\mathbb{F}^2 = \text{puntos} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{F}\}$$

$$\text{líneas} = \{(x,y) \in \mathbb{F}^2 \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}\}$$

s (Plano Afín)

Geometría de incidencia más el siguiente axioma:

(P'): Para toda línea $\ell$ y todo punto $A$ $\exists!$ $\ell'$ línea que contiene a $A$ y es paralela a $\ell$.

Notar que el plano cartesiano sobre $\mathbb{F}$ es un plano afín.

Existen planos afines con 4, 9, 16, 25 puntos pero NO con 36 (Euler).

¿Podemos estudiar aquí geometría Euclidiana?

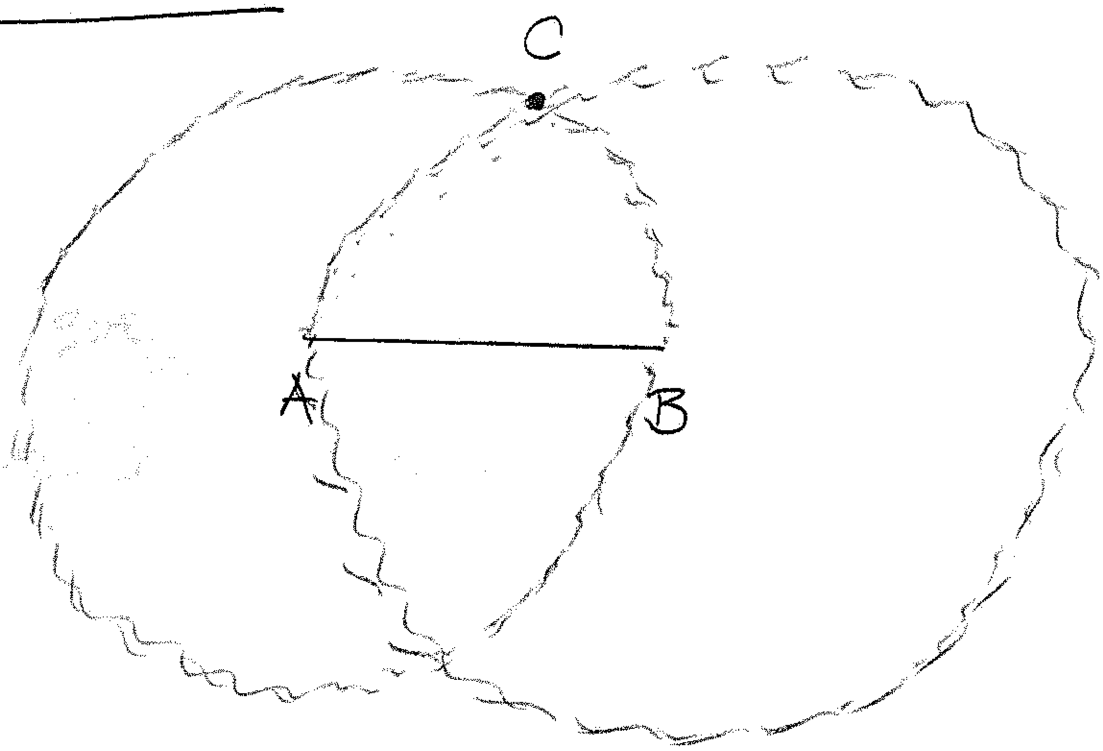
Sí á la Hilbert

¿por qué?

# Proposición 1 (LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES) Libro I.

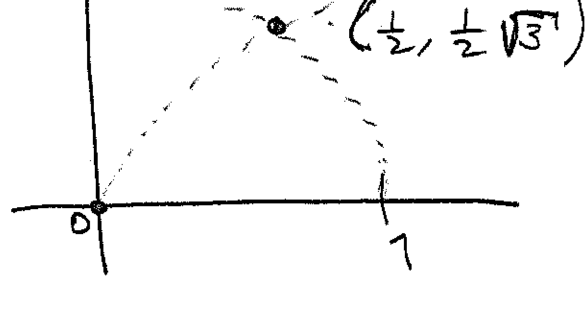
Sobre un segmento de línea dado se puede construir un triángulo equilátero.

<u>Demostración</u>:




$\exists$ C en la intersección de los dos círculos.

Pregunta:




¿?