Geometría algebraica I

18 marzo

Ayer: Nullstellensatz débil (después de Noether)

Hoy: Lema algebraico; $\mathbb{F}$ campo infinito

$R = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ $\mathbb{F}$-álgebra finitamente generada

si R es campo, entonces es algebraico $/\mathbb{F}$.

Teorema: (Normalización de Noether, Pag. 30 Hulek)

$\mathbb{F}$ campo infinito $\quad R = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ $\quad \mathbb{F}$-álgebra finitamente generada

entonces existen $y_1, \dots, y_m$ $\quad m \leq n$

con

1) $y_1, \dots, y_m$ algebraicamente independiente

2) R es un $\mathbb{F}[y_1, \dots, y_m]$-álgebra finita.

$\overset{\in}{z} = A + By \quad A, B \in \mathbb{F}[A']$

(y_1 aquí es la x del ejemplo)

Demostración del Lema algebraico:

$$R = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n] \qquad \mathbb{F}\text{-algebra fin gen}$$

supongamos R es campo.

Teorema Noether: $\exists\ y_1, \ldots, y_m \in R \quad m \leq n$

que hacen a R un $\mathbb{F}[y_1, .., y_m]$-algebra finita

$$B = \mathbb{F}[y_1, \ldots, y_m] \subseteq R$$

Demostración del Lema algebraico:

$$R = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] \qquad \mathbb{F}\text{-algebra fin gen}$$

Supongamos R es campo.

Teorema Noether: $\exists\ y_1, \dots, y_m \in R \quad m \leq n$

que hacen a R un $\mathbb{F}[y_1, \dots, y_m]$-algebra finita

$$B = \mathbb{F}[y_1, \dots, y_m] \subseteq R$$

$\Rightarrow$ B es campo

$\Rightarrow$ $m = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{c} R \\ | \\ B = \mathbb{F} \end{array}$ es finita $\blacksquare$

Eg 1: $\varphi : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^5$

$$(s,t) \longmapsto (s^2, t^2, \underbrace{s \cdot t}_{x_3}, s, t)$$

si $C = \{s=0\} \subseteq \mathbb{A}^2_{(s,t)}$

$$\varphi_{|C} : C \longrightarrow \overline{W} \subseteq \mathbb{A}^5$$

$$\varphi^*_{|C} : \mathbb{F}[\overline{W}] \longrightarrow \mathbb{F}[C] := \mathbb{F}[s,t]/\langle s \rangle$$

$$\ker \varphi^*_{|C} = \langle x_3, x_1, x_4 \rangle \subseteq \mathbb{F}[\overline{W}]$$

Dos opciones:

$$= \langle x_4 \rangle \subseteq \mathbb{F}[\overline{W}]$$

1) la imagen $\varphi(C) \subseteq \overline{W}$ está definida por $\underline{\underline{1}}$ ecuación en $\overline{W}$

codim 1

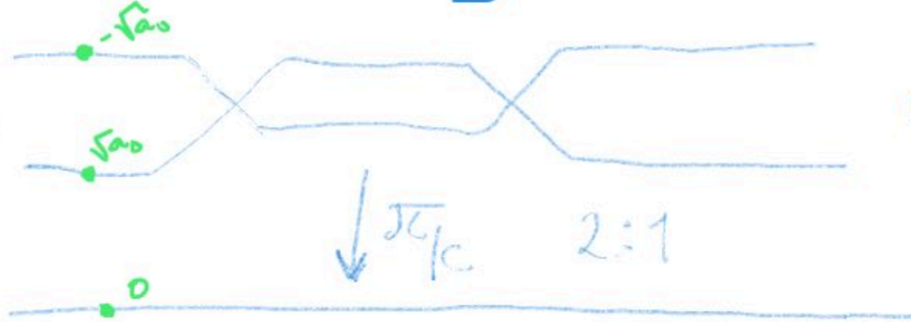
2) la imagen $\varphi(C) \subseteq \mathbb{A}^5$ está definido

codim 4 $\quad \underline{\underline{4}}$ ecuaciones

Eg 2: $f(x) \in \mathbb{C}[x]$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = f(x)\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

$$\begin{array}{ccc} C = & \text{(figure)} & \subseteq \mathbb{C}^2 \ni (x,y) \\ \downarrow \pi|_C & & \downarrow \pi \qquad \downarrow \\ \mathbb{C} & & \mathbb{C} \ni x \end{array}$$



$$\pi|_C^{-1}(0) = \{(0,\sqrt{a_0}), (0,-\sqrt{a_0}) \mid f(0) = a_0\}.$$

$\pi_{|C}$ es finito:

$\pi_{|C}^{*} : \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}[C] = \dfrac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle y^2 - f(x) \rangle}$

pag: 27 Hulek.

$\mathbb{F}[C] = \mathbb{F}[x]$-álgebra finita $\longrightarrow$ ¿extensión entera?

$\leftarrow$ es más, esta extensión satisface:

Es decir:

$z = h(x) + g(x)y$

$\forall \; z \in \mathbb{F}[C].$

y $\mathbb{F}[x]$ es un "anillo de polinomios"

$p \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ $\pi^{-1}_{|C}(p) = \{\underline{q, q'}\} \in C$. ¿Ecuaciones de $\pi^{-1}_{|C}(p)$ en C?

$\pi_{|C} : C \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ $\quad I(p) \in \mathbb{C}[\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}]$

$$\begin{array}{c} I(p) \\ \shortparallel \\ m_p = (x-p) \subseteq \mathbb{C}[x] \end{array}$$

ideal maximal

$(x-p)$ $\boxed{x \text{ aquí es una coordenada de } C}$ ideal no es maximal

$$\begin{array}{ccccc} (x-p) & & & & \\ \shortparallel & & & & \\ \pi^*_{|C}(m_p) & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[C] & \twoheadrightarrow & \mathbb{C}[C]/\underline{\pi^*} m_p \\ & & & & \shortparallel \\ & & & & \mathbb{C}[x,y]/\langle y^2 - f(x), x-p \rangle \end{array}$$

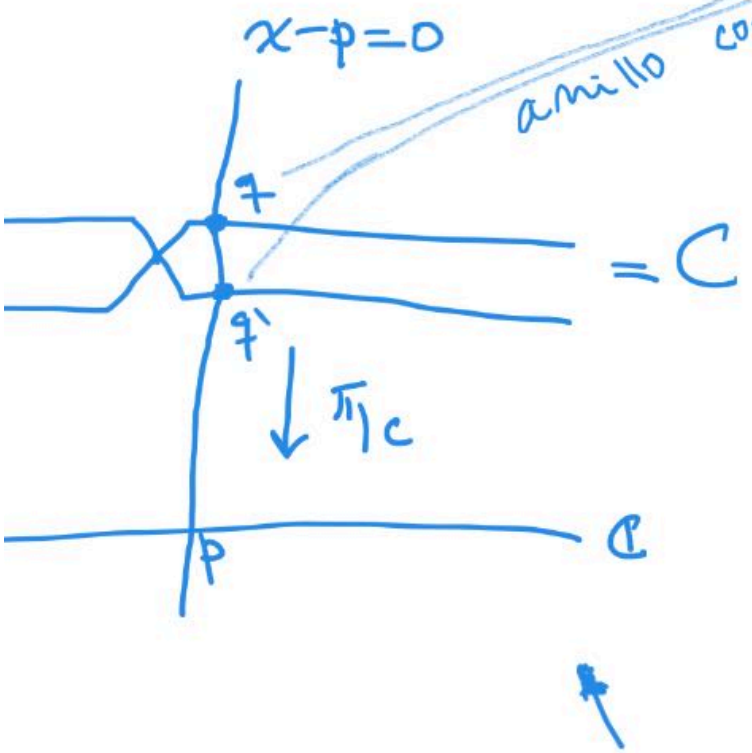
pues

$$\pi^*_{|C}(m_p) \longleftrightarrow \mathbb{C}[C] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[C]/\pi^* m_p \quad \text{pues}$$

$$\| $$

$$\mathbb{C}[x,y]/\langle y^2 - f(x), x-p\rangle$$

anillo coordenado de q+q'



No es campo.

Por lo tanto la ecuación

$$\{x-p=0\} \subseteq C$$

No define 1 punto en C.

Es más, define 2 pts: $q + q'$.