Geometría algebraica I

23 de marzo

Ayer: Lema algebraico ← Noether

Hoy: Lema pendiente (Nakayama)

finitamente generado = fin. gen

— // —

<u>Notación</u>: $B \subseteq A$ subanillo

1) $z \in A$ $z = f(b_1, \dots, b_n)$ $b_j \in B$

donde $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ n fijo.

$\Rightarrow$ A es un B-álgebra fin. gen.

2) $z \in A$ $\quad z = b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n$ con $n, y_1, \ldots, y_n$ fijos $\in A$

$b_j \in B$.

A es un B-módulo fin. gen.

Eg: $\mathbb{C}[C] = \{h(x) + g(x)y\}$ generadores $1, y$

$\left.= \mathbb{F}[x]\text{-módulo fin gen.}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \mathbb{F}[C] \\ | \\ \mathbb{F}[x] \end{array}$ integral

Eg: $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$-módulo fin gen.

Comentario: $A = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ $\mathbb{F}$-álgebra fin gen.

Noether: $\exists$ $y_1, \dots, y_m$ $B = \mathbb{F}[y_1, \dots, y_m]$

$m \leq n$ entonces $A = B$-módulo fin gen.

es decir, $\boxed{A \text{ es un } B\text{-módulo fin gen para un } B \subseteq A \text{ apropiado}}$.

Proposición: (Hulek pag 27)

① si A es un B-módulo fin. gen. $\Rightarrow$ A es integral sobre B.

② Recíprocamente: si $x \in A$ es integral$/B$

entonces $B[x]$ es un B-módulo fin gen.

Lema Pendiente: $A \neq 0$ un B-módulo fin gen
(Nakayama) $(B \subseteq A)$

Si $I \subsetneq B$ ideal propio, entonces

$I \cdot A \subsetneq A$ es ideal propio:

Dem: A es un B-módulo fin gen.

$$\Rightarrow \quad A = By_1 + \cdots + By_m \qquad y_j \in A$$

Asumamos: $I \cdot A = A \quad \Rightarrow \exists\, b_{ij} \in I$ tal que

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_j \qquad 1 \leq i \leq n.$$

$$\Rightarrow \quad \det(\delta_{ij} - b_{ij}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 \in I \quad \text{contradicción}$$

Recapitulando: f finito $\Rightarrow$ suprayectivo

Argumento: $y \in \overline{f(V)}$ deseamos mostrar $f^{-1}(y) \neq \emptyset$

$$\mathfrak{m}_y \subseteq \mathbb{F}[W] \; ; \; W = \overline{f(V)}$$

$$f^*\mathfrak{m}_y \subseteq \mathbb{F}[V] \quad \text{es ideal propio}$$

pues
$$\begin{array}{c} \mathbb{F}[V] \\ | \\ \mathbb{F}[W] \end{array}$$
es integral $\Rightarrow$ $\mathbb{F}[V] = \mathbb{F}[W]$-módulo fin gen.

Nakayama
$$\Rightarrow \quad f^*\mathfrak{m}_y \subsetneq \mathbb{F}[V] \quad \text{es propio.}$$

Nullstellensatz débil
$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}(f^*\mathfrak{m}_y) \neq \emptyset. \qquad \boxed{\Sigma}$$

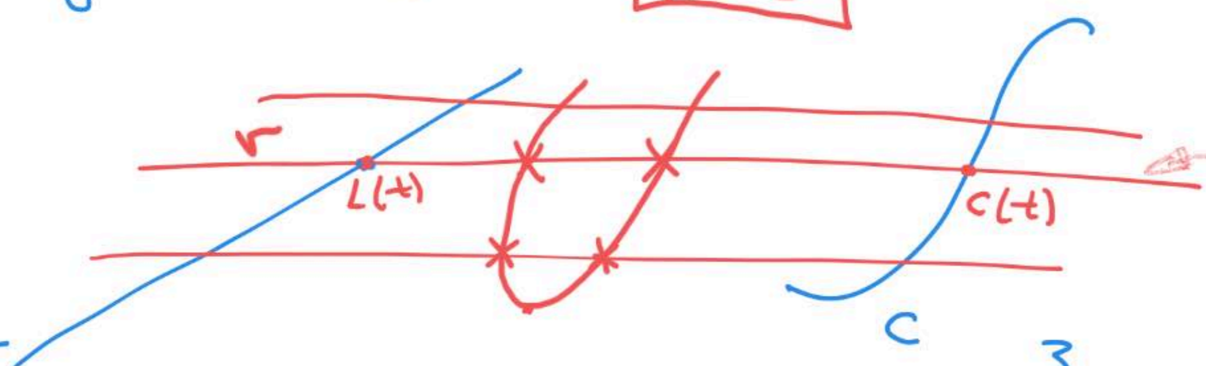
Eg: (Variedad reglada). $L(t) \overset{f}{\longmapsto} C(t)$ para un mismo t

$C = \text{Cónica} = \quad t \longmapsto (1, t, t^2) \subseteq \mathbb{A}^3$

$L = \text{línea} = \quad t \longmapsto (0, t, 1) \subseteq \mathbb{A}^3$

Queremos reglar con C y L.

$\boxed{r = t^2}$



$$S = \bigcup_t \overline{L(t)\,C(t)} \subseteq \mathbb{A}^3$$

OBSERVAR:

$\forall\ p \in S$

$\exists$ una línea $L \subseteq S$ que pasa por p

i.e. S es reglada

¿Que ecuaciones satisface S?

$$\overline{L(t)\,C(t)} = \underline{\underline{r}}\,L(\underline{\underline{t}}) + (1-\underline{\underline{r}})\,C(\underline{\underline{t}}) \longleftarrow r \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{A}^2 \xrightarrow[\psi]{} \mathbb{A}^3 \qquad (t,r) \longmapsto \left(1-r,\ rt + (1-r)t,\ r + (1-r)t^2\right)$$

$$\psi^* : \mathbb{F}[\mathbb{A}^3] \longrightarrow \mathbb{F}[\mathbb{A}^2]$$

$$\text{Ideal}\,(\text{Im}\,\psi) = \text{Kernel}$$

de este morfismo →

$$\begin{cases} x \longmapsto 1-r \\ y \longmapsto (1-r)t + rt \\ z \longmapsto r + (1-r)t^2 \end{cases}$$

$\parallel$

ecuaciones de $\overline{\text{Im}\,\psi}$

¿ $\overline{\mathrm{Im}\,\psi} = \mathrm{Im}\,\psi$?

$\mathbb{F}[S] \xrightarrow{\psi^*} \mathbb{F}[\mathbb{A}^2]$ ¿extensión integral?

si $\mathbb{F}[\mathbb{A}^2]$ = $\mathbb{F}[S]$-módulo fin gen $\Rightarrow$

$$\mathrm{Ideal}\left(\overline{\mathrm{Im}\,\psi}\right) = \langle xy^2 - x - z + 1 \rangle$$

Moraleja: $\exists$ superficies cúbicas en $\mathbb{A}^3$ regladas

¿Qué curvas contiene S?

$$\mathbb{A}^2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{A}^3$$

$$C = \{ \underline{r - t^2 = 0} \} \longmapsto \text{¿Ecuaciones?} = I\left(\overline{\psi_{|C}(C)}\right) \subseteq \mathbb{A}^3$$

$$\psi_{|C} : C \longrightarrow \mathbb{A}^3 \qquad\qquad \subseteq S$$

$$\psi^*_{|C} : \mathbb{F}[\mathbb{A}^3] \longrightarrow \mathbb{F}[C] = \frac{\mathbb{F}[\mathbb{A}^2]}{I(C)}$$

$$\mathrm{Var}\left(\ker \psi^*_{|C}\right) = Q \cap Q' \subseteq \mathbb{A}^3$$

$$\overline{\psi_{|C}(C)} = \left\{ \begin{array}{l} y^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 - z - 1 = 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{A}^3$$

```
: A2 = QQ[t,r];

: A3 = QQ[x,y,z];

: S = ker map(A2,A3,matrix{{1-r, (1-r)*t + r*t, r + (1-r)*t^2}})

              2
= ideal(x*y  - x - z + 1)

: Ideal of A3

: use A2; C = ideal(r-t^2);

: Ideal of A2

: ImagePhiC = ker map(A2/C,A3,matrix{{1-r, (1-r)*t + r*t, r + (1-r)*t^2}})

             2            2
= ideal (y  + x - 1, x  + z - 1)

: Ideal of A3
```