Geometría algebraica 1

25 mar 21.

Ayer: Superficies regladas & Lema de Nakayama

Hoy: Normalización de Noether & superficie doblemente reglada.
funciones racionales.

— // —

Comentario sobre notación: $\mathbb{F}[V]$ = funciones regulares sobre $V \subseteq \mathbb{A}^n$
variedad afín.

$= \mathcal{O}_V(V)$ = funciones polinomiales

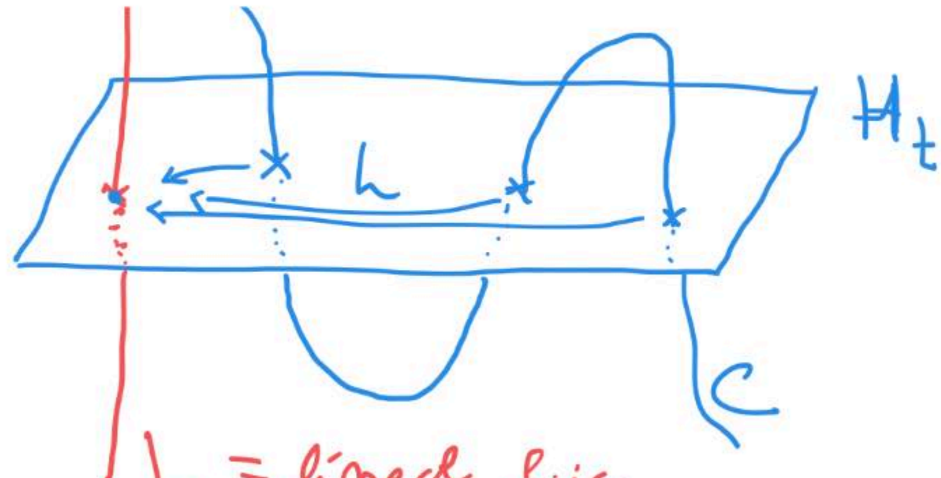
abierto $U \subseteq V$

futuro: $\mathcal{O}_V(U)$ = funciones regulares sobre U.

comentario
sobre Normalización de Noether.

Eg: $C \subseteq \mathbb{A}^3$ $\underbrace{\text{curva}}$ (eg: $t \mapsto (t, t^2, t^3)$)

¡ojo! No tenemos noción de dimensión



H_t = pincel de 2-planos en $\mathbb{A}^3$

$H_t := \{$ 2-planos en $\mathbb{A}^3$ que contienen una línea fija $\}$

$h : C \xrightarrow{3:1} L$

$\underline{\text{morfismo finito}}$
= modelo =

$$h^* : \mathbb{F}[L] \longrightarrow \underbrace{\mathbb{F}[C]}$$

$\mathbb{F}[L] = \mathbb{F}[y]$ - módulo fin. generado.

1) $\mathbb{F}[y] \subseteq \mathbb{F}[C]$!

2) $h: C \longrightarrow L$ finito $\Rightarrow$ $\dim L = \dim C$

Noether: $V \subseteq \mathbb{A}^n$ var. afín.

¿se puede? ↳ H_t = pincel de k-planos que arroje

$\Rightarrow h: V \longrightarrow \Lambda$ finito con Λ un subespacio lineal.

Si esto es posible

Hoy → 1) $\mathbb{F}[V]$ es un $\mathbb{F}[\Lambda]$-módulo fin gen

→ 2) $\dim V = \dim \Lambda$

futuro

—/—

funciones racionales: V irreducible

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{\mathbb{F}}}[V]$ dominio.

<u>Def</u>.- $\mathbb{F}(V)$ = Campo de fracciones de V

sus elementos: $f = g/h$ con $g, h \in \mathbb{F}[V]$

$f(p)$

Esto está bien definido en p si $h(p) \neq 0$.

<u>Def</u>.- Una función racional f es regular en p si $f = g/h$ & $h(p) \neq 0$.

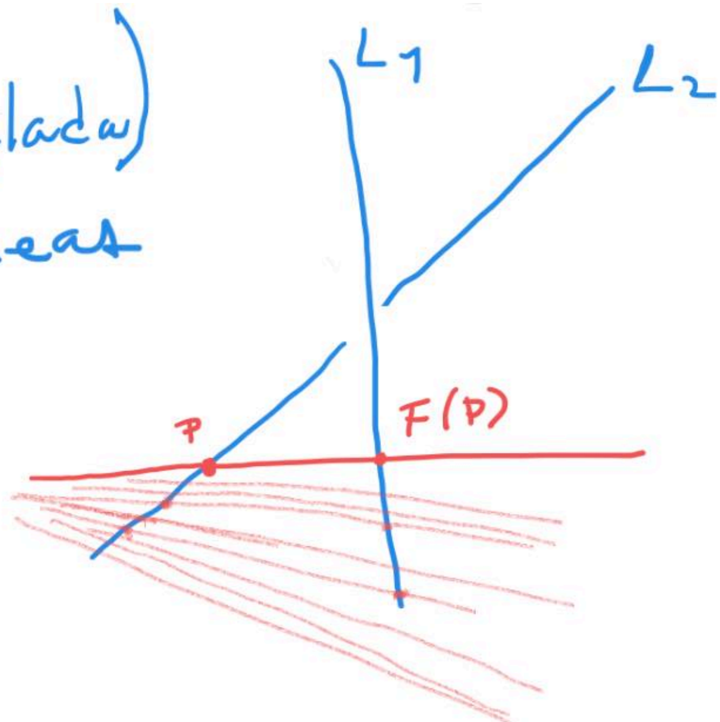
<u>Defi</u>.- $f: V \dashrightarrow \mathbb{A}^n$ aplicación racional
es ① $p \longmapsto (f_1(p), \ldots, f_m(p))$ donde

f_j son funciones racionales. f es regular
en p si f_j son regulares en P.

② $f: V \dashrightarrow W$ es una aplicación racional regular
en U. & $f(U) \subseteq W$.
con $U \subseteq V$ abierto.

Eg (superficie doblemente reglada)

$L_1\ L_2 \subseteq \mathbb{A}^3$ líneas



$F: L_1 \longrightarrow L_2$

isomorfismo

$$W = \bigcup_{p \in L_1} \overline{pF(p)}$$

¿Es W una variedad afín?

OBSERVACIÓN:

1) W es reglado

¿Ecuaciones de W?

$$L_1 = V(z,\ y+1)$$

$$L_2 = (2x-y+z,\ z+1)$$

$$H_t = \{x+ty=0\} \longleftarrow \text{barrido } L=V(x,y)$$

Queremos: $rL + (1-r)L'$

$$H_t \cap L_1 = \{(t, -1, 0)\} = L(t)$$

$$H_t \cap L_2 = \left\{ t \longmapsto \left(\frac{1}{2t+1}, \frac{2}{2t+1}, -1\right)\right\} = L'(t) \qquad t \neq -\frac{1}{2}$$

$$V = \mathbb{A}^1 \setminus \{-\tfrac{1}{2}\}$$

Queremos: $\psi : V \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^3$

$$(t, r) \longmapsto rL(t) + (1-r)L'(t)$$

$$\mathbb{F}[V] = \mathbb{F}[t, z] / z(2t+1) = 1$$

$$(t, r) \xmapsto[\psi]{} (rt + (1-r)z, \; -r + (1-r)2z, \; r-1)$$

¿encaje? ← analizar ψ^*

ψ es <u>regular</u>

Ecuaciones de $\overline{W}$: $\ker \psi^* = I(\overline{W})$

Producto tensor

donde $\psi^*: \mathbb{F}[\mathbb{A}^3] \longrightarrow \mathbb{F}[V \times \mathbb{A}^1] \cong \mathbb{F}[V] \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[\mathbb{A}^1]$

$$x \longmapsto rt + (1-r)z$$
$$y \longmapsto -r + (1-r)2z$$
$$z \longmapsto r - 1$$

Álgebra Pendiente:

$\psi_{|W}: V \times \hat{\mathbb{A}} \longrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^3$ Dominante $\iff \psi^*_{|W}$ inyectivo

$\psi_{|W}$ suprayectivo en $\overline{W}$ si $\psi_{|W}$ es finito i.e. $\mathbb{F}[W] \xhookrightarrow[\psi^*_{|W}]{} \mathbb{F}[V \times \mathbb{A}^1]$

si $\psi^*_{|W}$ induce una extensión integral de anillos.

```
: V = QQ[t,z]/ideal(z*(2*t+1)-1);

: A1 = QQ[r];

: A3 = QQ[a,b,c];

: J = A1**V;

: Phi = map(J,A3, matrix{{r*t+(1-r)*z,-r + (1-r)*2*z, r-1}})

= map(J,A3,{r*t - r*z + z, - 2r*z - r + 2z, r - 1})

: RingMap J <--- A3

: ker Phi
```

Esta es la ecuación que satisface W.

Conclusión: esta cuádrica en A^3 es reglada.

```
                    2                    2
= ideal(2a*b - b  + 2a*c - b*c + 2c  + 2a - b + 2c)

: Ideal of A3
```