Geometría algebraica I

8 de abril

Ayer: funciones racionales

Hoy: funciones racionales y definición de dimensión.

—— // ——

$V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad afín irreducible $\Rightarrow$ $\mathbb{F}[V]$ es dominio entero.

podemos construir $\rightrightarrows$ $\mathbb{F}(V) =$ campo de funciones racionales en V.

obs.-

1) es un campo

2) $f \in \mathbb{F}(V)$ $\quad \underbrace{f = g/h}_{\text{está bien definido en } P \text{ si } h(P) \neq 0.}$ $\quad g, h \in \mathbb{F}[V]$

3) $f = g/h$ con $h(P) \neq 0$

$\Rightarrow$ f es regular en $P \in V$.

Def: 1) $\mathrm{Dom}(f) := \{ P \in V \mid f \text{ es regular en } P \}$

2) $V_h := \{ P \in V \mid h(P) \neq 0 \text{ con } h \in \mathbb{F}[V] \}$

Proposición $f \in \mathbb{F}(V)$ 1) $\mathrm{Dom}(f) \subseteq V$ abierto denso

2) $\mathrm{Dom}(f) = V \iff f \in \mathbb{F}[V]$

3) $\mathrm{Dom}(f) \supseteq V_h \iff f \in \mathbb{F}[V][h^{-1}]$

Demostración: $$D_f := \{ h \in \mathbb{F}[V] \mid h \cdot f \in \mathbb{F}[V] \}$$

1)

$$= \text{ideal de } \mathbb{F}[V].$$

$$= \{ h \mid f = g/h \} \cup \{0\}.$$

observemos:

cuando $f = g/h$

$$V \setminus \mathrm{Dom}(f) = \{ p \in V \mid h(p) = 0 \}$$

$$= V_a(D_f) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Dom}(f) \subseteq V$$

abierto Zariski

2)

2) si $\mathrm{Dom}(f) = V \iff \mathrm{Var}(D_f) = \emptyset$

Nullstellensatz débil. $\iff D_f = \mathbb{F}[V]$

$\Rightarrow 1 \in D_f \Rightarrow 1 \cdot f \in \mathbb{F}[V]$.

3)

si $\mathrm{Dom}(f) \supseteq V_h \Rightarrow h$ se anula en $\mathrm{Var}(D_f)$.

Nullstellensatz fuerte $\Rightarrow$ $h^k \in D_f$ para algún $k \geq 1$.

$\Rightarrow f = g/h^k \in \mathbb{F}[V][h^{-1}]$ $\blacksquare$

observaciones: 2) arriba $f \in \mathbb{F}(V)$ regular en $\bar{V}$

$\Rightarrow f$ es "conocida" $\in \mathbb{F}[V]$

3) Podemos hablar de "funciones regulares en abiertos de $\bar{V}$"

Notación: $\mathcal{O}_V(U) =$ funciones regulares en $U \subseteq V$ abierto

si $U = V_h$

$\Rightarrow \mathcal{O}_V(U) = \mathbb{F}[V][h^{-1}]$.

Eg: $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = U \subseteq \mathbb{A}^1$ $\qquad$ $\mathbb{F}[U] = \mathbb{F}[x][x^{-1}]$

$$= \mathbb{F}[x, x^{-1}]$$

$$= \mathbb{F}(x).$$

<u>CORO</u>: $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}_V(U)$

$f : V \dashrightarrow \mathbb{A}^m \qquad f = (f_1 \dots f_m)$ $\quad$ aplicación racional

= regular en U =

Eg: $\mathbb{A}^1 \setminus \{-1/2\} \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^3$ $\qquad$ φ es regular.

$$(r, t) \longmapsto \left(rt + \frac{1}{2t+1}(1-r), \ -r + \frac{2}{2t+1}, \ r-1 \right)$$

$\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \dashrightarrow \mathbb{A}^3 \quad ; \quad \mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{A}^3.$

OBSERVACIONES BÁSICAS: $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad afín irred.

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}(V) \\ | \\ \mathbb{F} \end{array}$$ extensión de campos

¿Qué propiedades tiene?

Noether: $\exists\ y_1, \dots, y_m$ $m \leq n$ tal que $\mathbb{F}[V]$ es un $\mathbb{F}[y_1, \dots, y_m]$-módulo fin gen.

i.e., $f \in \mathbb{F}[V]$ $f = a_1 e_1 + \cdots + e_k a_k$ $a_j \in \mathbb{F}[y_1 \dots y_m]$.

Extensiones de anillos Extensiones de campos

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}[V] \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{F}(V) \arrow[d, dash] \\
\mathbb{F}[y_1, \ldots, y_m] \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{F}(y_1, \ldots, y_m) \arrow[d, dash] \\
\mathbb{F} \arrow[r, equal] & \mathbb{F}
\end{tikzcd}$$

extensión finita de campos } Gal

} transcendental de grado m. } dim de V

<u>Def</u>: $\dim V = \text{trans } \mathbb{F}(V)$ sobre $\mathbb{F}$

Eg: $\dim \mathbb{A}^n = n$.

si $\dim X = 1$ entonces llamos a X curva.

si $\dim X = 2$ " " " superficie.

<u>Teorema</u>: $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad irreducible de $\dim X = n-1$.

Entonces X es una hipersuperficie i.e $I(X)$ es principal.

<u>Dem</u>: $X \neq \mathbb{A}^n$ pues $\dim X \neq \dim \mathbb{A}^n \Rightarrow$

$\exists\ f \in \mathbb{F}[\mathbb{A}^n]$ que se anula en X.

consideremos h factor irreducible de f.

$\underline{Y} := Var(h) \subseteq \overline{X}$. con $\underline{Y}$ irreducible.

$\overset{!}{\Rightarrow}$ $Y = X$. (tarea) así $g \in I(X) \underset{\text{Nullstellensatz fuerte}}{\Longrightarrow} h \mid g^e \quad e > 0$

i.e. $g^e \in \langle h \rangle \underset{\substack{\text{irred} \\ \text{de } h}}{\Longrightarrow} \underbrace{g \in \langle h \rangle}_{h \mid g}$

$\Longrightarrow I(X) = \langle h \rangle$ principal. $\boxed{\Sigma}$

— /. —

$X \subseteq \mathbb{A}^n$ con $\dim(X) = n-1$ se llama DIVISOR de $\mathbb{A}^n$.

Eg: $P \in \mathbb{F}[\mathbb{A}^1] = \mathbb{F}[x] \qquad P \neq 0.$

$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid y^2 = P(x) \}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "P_x"'] & (x,y) \arrow[d, mapsto, "2:1"] \\ \mathbb{A}^1 & x \end{tikzcd}$$

extensión de campos

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}[C] \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\text{fin gen}"'] & \mathbb{F}(C) \arrow[d, dash] \\ \mathbb{F}[\mathbb{A}^1] \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{F}(x) \arrow[d, dash] \\ \mathbb{F} \arrow[r, equal] & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

$\mathbb{F}(C) \mid \mathbb{F}(x)$: } finita

$\mathbb{F}(x) \mid \mathbb{F}$: } transcendente de grado 1.

$$\dim C = \dim_{\text{tr}} \mathbb{F}(x)|_{\mathbb{F}} = 1$$

$$\mathbb{F}[C] = \mathbb{F}[x,y]/_{y^2 - P(x)} = \mathbb{F}[x] + \mathbb{F}[x]\,y$$

$\mathbb{F}[x]$-módulo fin gen

EJER: ¿ $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}(C) \backslash \mathbb{F}(x))$?