

# Geometría algebraica I

8 de abril

Ayer: funciones racionales

Hoy: funciones racionales y definición de dimensión.

———— " —————

$V \subseteq \mathbb{A}^n$  variedad afín irreducible  $\Rightarrow \mathbb{F}[V]$  es dominio entero.

podemos construir  $\Rightarrow \mathbb{F}(V) =$  campo de funciones racionales en  $V$ .

obs. - 1)  $\mathbb{A}^1$  um campo 2)  $f \in \mathbb{F}(V)$   $f = g/h$   $g, h \in \mathbb{F}[V]$   
está bem definido em  $P$  se  $h(P) \neq 0$ .

3)  $f = g/h$  com  $h(P) \neq 0$

$\Rightarrow f$  é regular em  $P \in V$ .

Def: 1)  $\text{Dom}(f) := \{P \in V \mid f \text{ é regular em } P\}$

2)  $V_h := \{P \in V \mid h(P) \neq 0 \text{ com } h \in \mathbb{F}[V]\}$

Proposición  $f \in \mathbb{F}(V)$  1)  $\text{Dom}(f) \subseteq \bar{V}$   
abierto denso

$$2) \text{Dom}(f) = V \Leftrightarrow f \in \mathbb{F}[V]$$

$$3) \text{Dom}(f) \supseteq V_h \Leftrightarrow f \in \mathbb{F}[V][h^{-1}]$$

Demostración:

$$D_f := \{h \in \mathbb{F}[V] \mid h \cdot f \in \mathbb{F}[V]\}$$

1)

$$= \text{ideal de } \mathbb{F}[V].$$
$$= \{h \mid f = g/h\} \cup \{0\}.$$

observamos:

$$\bar{V} \setminus \text{Dom}(f) = \{p \in V \mid h(p) = 0\}$$

$$= \text{Var}(D_f)$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) \subseteq V$$

abierto Zariski

2) si  $\text{Dom}(f) = V \iff \text{Var}(D_f) = \emptyset$

Nullstellensatz  
debil.  $\iff D_f = \mathbb{F}[V]$

$\Rightarrow 1 \in D_f \Rightarrow 1 \cdot f \in \mathbb{F}[V].$

3) si  $\text{Dom}(f) \supseteq V_h \Rightarrow h$  se anula en  $\text{Var}(D_f).$

Nullstellensatz fuerte  
 $\Rightarrow$

$h^k \in D_f$  para algún  $k \geq 1.$

$\Rightarrow f = g/h^k \in \mathbb{F}[V][h^{-1}]$



Observaciones: 2) arriba  $f \in \mathbb{F}(V)$  regular en  $\bar{V}$   
 $\Rightarrow f$  es "comoda"  $\in \mathbb{F}[V]$

3) Podemos hablar de "funciones regulares en abiertos de  $\bar{V}$ "

Notación:  $\mathcal{O}_V(U) =$  funciones regulares  
en  $U \subseteq \bar{V}$   
abierto

si  $U = V_h$

$\Rightarrow \mathcal{O}_V(U) = \mathbb{F}[V][h^{-1}]$ .

Eg:  $A^1 \setminus \{0\} = U \subseteq A^1$

$$\begin{aligned} F[U] &= F[x][x^{-1}] \\ &= F[x, x^{-1}] \\ &= F(x). \end{aligned}$$

CORO:  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_V(U)$

$f: U \dashrightarrow A^m \quad f = (f_1, \dots, f_n)$

aplicación  
racional  
= regular en  $U =$

Eg:  $A^1 \setminus \{1/2\} \times A^1 \xrightarrow{4} A^3 \quad 4 \text{ es regular.}$

$$(r, t) \mapsto \left( rt + \frac{1}{2t+1}(1-r), -r + \frac{2}{2t+1}, r-1 \right)$$

$$A^1 \times A^1 \dashrightarrow A^3 \quad ; \quad A^2 \dashrightarrow A^3.$$

OBSERVACIONES BÁSICAS:

$$V \subseteq \mathbb{A}^n$$

Variedad afín irred.

$$F(V)$$

$$\downarrow$$

$$F$$

extensión  
de campos

¿Qué propiedades tiene?

Noether:  $\exists \gamma_1, \dots, \gamma_m$

$m \leq n$  tal que  $F[V]$  es un

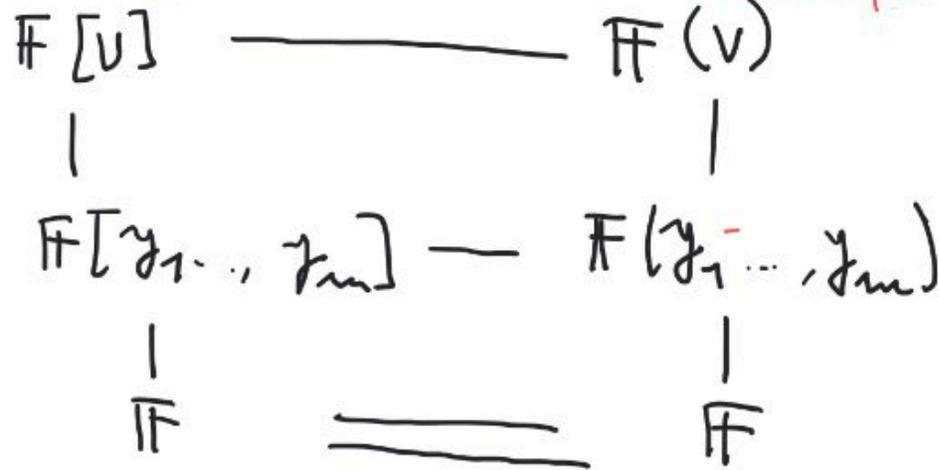
$F[\gamma_1, \dots, \gamma_m]$ -módulo fin gen.

s.e.,  $f \in F[V]$

$$f = a_1 e_1 + \dots + e_k a_k \quad a_j \in F[\gamma_1, \dots, \gamma_m].$$

Extensiones de anillos

Extensiones de campos



extensión finita de campos } Gal

transcendental de grado  $m$ . } dim de  $V$

Def.  $\dim V = \text{trans } \mathbb{F}(V) \text{ sobre } \mathbb{F}$

Ej:  $\dim \mathbb{A}^m = m$ .      si  $\dim X = 1$  entonces llamamos a  $X$  curva.

si  $\dim X = 2$  " " " " superficie.

Teorema:  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  Variedad irreducible de  $\dim X = n-1$ .

Entonces  $X$  es una hipersuperficie i.e.  $I(X)$  es principal.

Dem:  $X \neq \mathbb{A}^n$  pues  $\dim X \neq \dim \mathbb{A}^n \Rightarrow$

$\exists f \in \mathbb{F}[\mathbb{A}^n]$  que se anula en  $X$ .

Consideremos  $h$  factor irreducible de  $f$ .

$Y := \text{Var}(h) \subseteq \mathbb{A}^n$ . Con  $Y$  irreducible.

$\Rightarrow Y = X$ . (tarea)

si  $g \in \mathcal{I}(X) \Rightarrow h \mid g^e \quad e > 0$   
Nullstellensatz fuerte

i.e.  $g^e \in \langle h \rangle \Rightarrow g \in \langle h \rangle$   
irred de  $h$   $h \mid g$

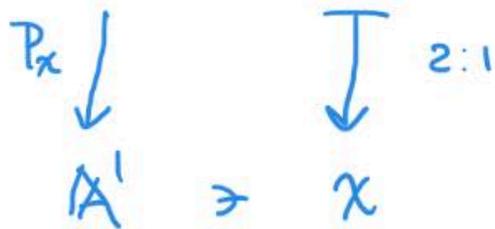
$\Rightarrow \mathcal{I}(X) = \langle h \rangle$  Principal.



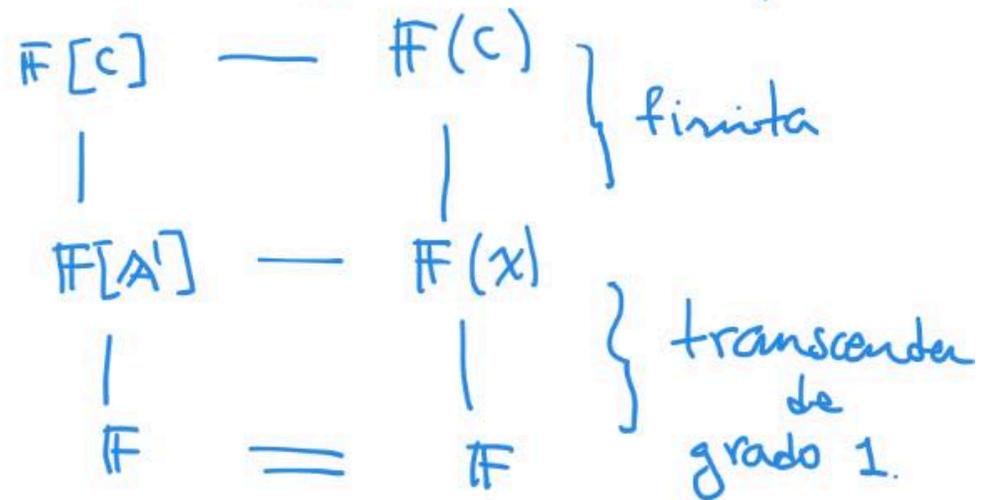
$X \subseteq \mathbb{A}^m$  con  $\dim(X) = m-1$  se llama DIVISOR de  $\mathbb{A}^m$ .

Eg:  $P \in F[A'] = F[x] \quad P \neq 0.$

$$C = \{ (x, y) \in A^2 \mid y^2 = P(x) \}$$



extensión de campos



finita

$$\dim C = \dim_{\text{tan}} F(x)_{|F} = 1$$



$$F[C] = F[x, y] / (y^2 - P(x)) = F[x] + F[x]y$$

$F[x]$  - módulo finita

EJER: ¿Gal  $(F(C) \setminus F(x))$ ?