

Geometría algebraica I

8 de abril

Ayer: funciones racionales

Hoy: funciones racionales y definición de dimensión.

———— " —————

$V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad afín irreducible $\Rightarrow \mathbb{F}[V]$ es dominio entero.

podemos construir \Rightarrow
 \Rightarrow $\mathbb{F}(V) =$ campo de funciones racionales en V .

obs. - 1) K um campo 2) $f \in F(V)$ $f = g/h$ $g, h \in F[V]$
está bem definido em P se $h(P) \neq 0$.

3) $f = g/h$ com $h(P) \neq 0$

$\Rightarrow f$ é regular em $P \in V$.

Def: 1) $\text{Dom}(f) := \{P \in V \mid f \text{ é regular em } P\}$

2) $V_h := \{P \in V \mid h(P) \neq 0 \text{ com } h \in F[V]\}$

Proposición $f \in \mathbb{F}(V)$ 1) $\text{Dom}(f) \subseteq \bar{V}$
abierto denso

$$2) \text{Dom}(f) = V \iff f \in \mathbb{F}[V]$$

$$3) \text{Dom}(f) \supseteq V_h \iff f \in \mathbb{F}[V][h^{-1}]$$

Demostración:

$$D_f := \left\{ h \in \mathbb{F}[V] \mid h \cdot f \in \mathbb{F}[V] \right\}$$

1)

$$= \text{ideal de } \mathbb{F}[V].$$
$$= \left\{ h \mid f = g/h \right\} \cup \{0\}.$$

observamos:

$$\bar{V} \setminus \text{Dom}(f) = \left\{ p \in V \mid h(p) = 0 \right\}$$
$$= \text{Var}(D_f)$$

$\Rightarrow \text{Dom}(f) \subseteq V$
abierto Zariski

2) si $\text{Dom}(f) = V \Leftrightarrow \text{Var}(D_f) = \emptyset$

Nullstellensatz
debil. $\Leftrightarrow D_f = \mathbb{F}[V]$

$\Rightarrow 1 \in D_f \Rightarrow 1 \cdot f \in \mathbb{F}[V].$

3) si $\text{Dom}(f) \supseteq V_h \Rightarrow h$ se anula en $\text{Var}(D_f).$

Nullstellensatz fuerte
 \Rightarrow

$h^k \in D_f$ para algún $k \geq 1.$

$\Rightarrow f = g/h^k \in \mathbb{F}[V][h^{-1}]$



Observaciones: 2) arriba $f \in \mathbb{F}(V)$ regular en \bar{V}
 $\Rightarrow f$ es "comoda" $\in \mathbb{F}[V]$

3) Podemos hablar de "funciones regulares en abiertos de \bar{V} "

Notación: $\mathcal{O}_V(U) =$ funciones regulares
en $U \subseteq \bar{V}$
abierto

si $U = V_h$

$\Rightarrow \mathcal{O}_V(U) = \mathbb{F}[V][h^{-1}]$.

Eg: $A^1 \setminus \{0\} = U \subseteq A^1$

$$\begin{aligned} F[U] &= F[x][x^{-1}] \\ &= F[x, x^{-1}] \\ &= F(x). \end{aligned}$$

CORO: $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_V(U)$

$$f: U \longrightarrow A^m \quad f = (f_1, \dots, f_n)$$

aplicación
racional
= regular en $U =$

Eg: $A^1 \setminus \{1/2\} \times A^1 \xrightarrow{4} A^3$ 4 es regular.

$$(r, t) \longmapsto \left(rt + \frac{1}{2t+1}(1-r), -r + \frac{2}{2t+1}, r-1 \right)$$

$$A^1 \times A^1 \dashrightarrow A^3 \quad ; \quad A^2 \dashrightarrow A^3.$$

OBSERVACIONES BÁSICAS:

$$V \subseteq \mathbb{A}^n$$

Variedad afín irred.

$$F(V)$$

$$\downarrow$$

$$F$$

extensión
de campos

¿Qué propiedades tiene?

Noether: $\exists \gamma_1, \dots, \gamma_m$

$m \leq n$ tal que $F[V]$ es un

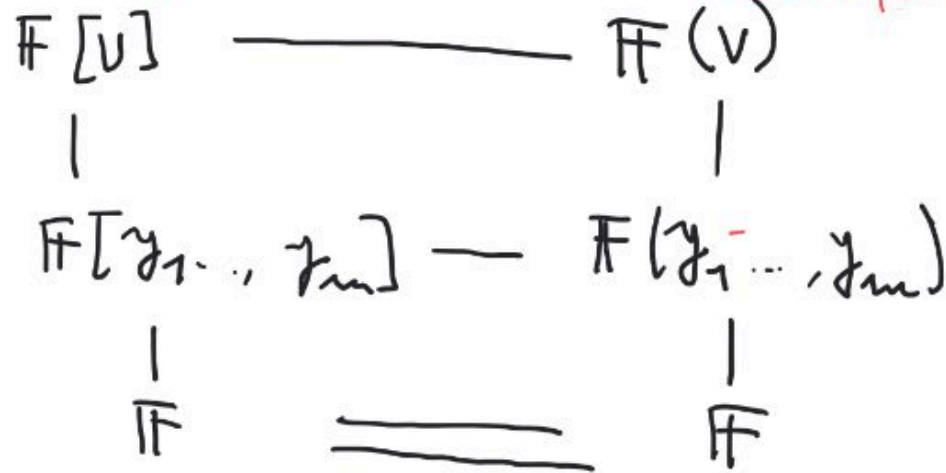
$F[\gamma_1, \dots, \gamma_m]$ -módulo fin gen.

s.e., $f \in F[V]$

$$f = a_1 e_1 + \dots + e_k a_k \quad a_j \in F[\gamma_1, \dots, \gamma_m].$$

Extensiones de anillos

Extensiones de campos



extensión finita de campos } Gal

transcendental de grado m . } dim de V

Def. $\dim V = \text{trans } \mathbb{F}(V) \text{ sobre } \mathbb{F}$

Ej: $\dim \mathbb{A}^m = m$. si $\dim X = 1$ entonces llamamos a X curva.

si $\dim X = 2$ " " " " superficie.

Teorema: $X \subseteq \mathbb{A}^n$ Variedad irreducible de $\dim X = n-1$.

Entonces X es una hipersuperficie i.e. $I(X)$ es principal.

Dem: $X \neq \mathbb{A}^n$ pues $\dim X \neq \dim \mathbb{A}^n \Rightarrow$

$\exists f \in \mathbb{F}[\mathbb{A}^n]$ que se anula en X .

Consideremos h factor irreducible de f .

$Y := \text{Var}(h) \subseteq \mathbb{A}^n$. Con Y irreducible.

$\Rightarrow Y = X$. (tarea)

si $g \in \mathcal{I}(X) \Rightarrow h \mid g^e \quad e > 0$
Nullstellensatz fuerte

i.e. $g^e \in \langle h \rangle \Rightarrow g \in \langle h \rangle$
irred de h $h \mid g$

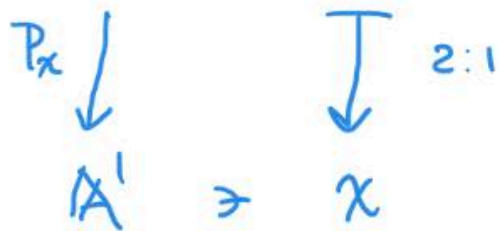
$\Rightarrow \mathcal{I}(X) = \langle h \rangle$ Principal.



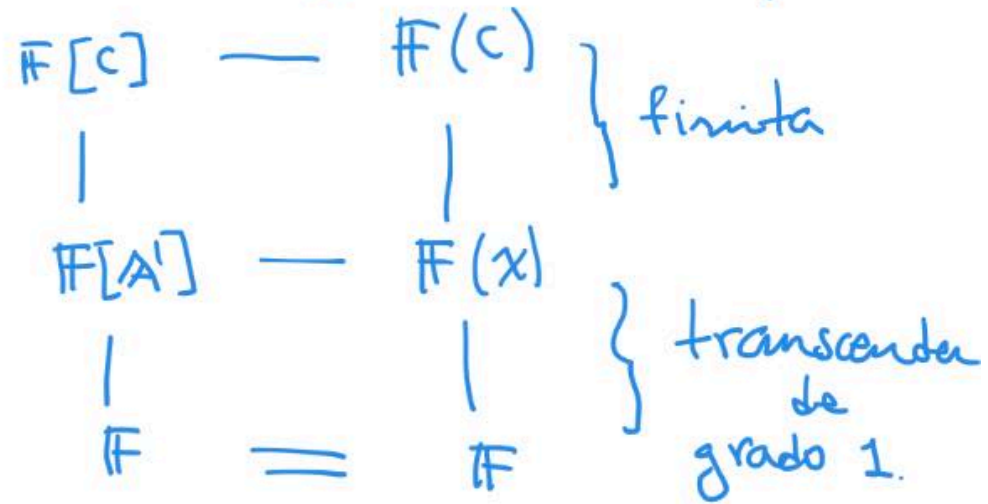
$X \subseteq \mathbb{A}^m$ con $\dim(X) = m-1$ se llama DIVISOR de \mathbb{A}^m .

Eg: $P \in F[A'] = F[x] \quad P \neq 0.$

$$C = \{ (x, y) \in A^2 \mid y^2 = P(x) \}$$



extensión de campos



finita

$$\dim C = \dim_{\text{tan}} F(x)_{|F} = 1$$



$$F[C] = F[x, y] / (y^2 - P(x)) = F[x] + F[x]y$$

$F[x]$ - módulo finita

EJER: ¿Gal $(F(C) \setminus F(x))$?