Geometría algebraica I

13 de abril

Ayer: dimensión: $\text{grado}_{\text{trans}}$ $\mathbb{F}(V) \subseteq_{\text{alg}} \mathbb{F}(\mathbb{A}^n)$ / $\mathbb{F}$ trans = dim

Hoy: suavidad.

—— 1. ——

Caso especial: $V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ Variedad afín irreducible ($f \neq 0$ irreducible).

Definición: $P = (a_1, \dots, a_n) \in V$. El espacio tangente a V en P se define como

$$T_P V := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\,(x_i - a_i) = 0 \right\}$$

hiperplano en $\mathbb{A}^n$.

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ = derivadas parciales formales.

OBSERVACION: $L \subseteq \mathbb{A}^n$ línea que contiene a P.

Entonces $f_{|L} \in \mathbb{F}[t]$ tiene una raíz múltiple en P $\iff$ $L \subseteq T_pV$.

Argumento: L es la imagen de

$$\varphi : t \longmapsto (a_1 + tb_1, \ldots, a_n + tb_n)$$

$\varphi(0) = P$.

$$f_{|L} = f(a_1 + tb_1, \ldots, a_n + tb_n)$$

$$f_{|L}(0) = f(a_1, \ldots a_n) = f(P) = 0 .$$

$f_{|L}$ tiene una raíz multiple en 0 $\iff$

$$\frac{\partial f|_L}{\partial t}(0) = 0 = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial f(p)}{\partial t} = 0$$

$\Rightarrow \quad L \subseteq T_pV$ pues satisface la ecuación

$$\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)(x_j - a_j) = 0 \quad \leftarrow T_pV$$

$\blacksquare$

—//—

<u>Def</u>: $p \in V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ se dice suave si existe i tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$. De lo contrario, p se dice punto singular.

Obser<u>vaciones</u>: 1) p suave $\Longleftrightarrow T_pV$ es un hiperplano

2) p singular $\Longleftrightarrow T_pV = \mathbb{A}^n$.

Proposición: $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ hiper superficie irreducible.

$$V_{suave} := \{ p \in V \mid p \text{ es suave en } V \}$$ es un abierto denso de V.

Demostración: $V_{sing} := V \setminus V_{suave}$, está definido por $V\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, f\right)$ el cual es cerrado.

$\Rightarrow V_{suave}$ es abierto Zariski. Para mostrar que es denso es suficiente mostrar $V_{sing} \neq V$.

si $V_{sing} = V \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in (f)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial j} = 0$$

si $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 0$

$$\partial_j f = 0 \quad \forall j \quad = \quad f \equiv CTE$$

$$\Rightarrow \Leftarrow$$

si $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = p$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f \equiv CTE \quad \text{ó} \\ f_{x_i} = x_i^p \end{array}$$

$$\Rightarrow f = (x_1 \cdots x_n)^p$$

no es irreducible.

$\boxed{\Sigma}$.

— "

Corolario: Existe $\underset{\substack{\text{abierto}\\ \text{denso}}}{\mathcal{U} \subseteq V}$ tal que si $p \in \mathcal{U}$

$$\underbrace{\dim T_p V}_{\substack{\text{dimensión}\\ \text{de}\\ \text{un subespacio}\\ \text{lineal}}} = \underbrace{\dim V}_{\substack{\text{grado trans}\\ \text{de esta}\\ \text{extensión}}}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}(V) \\ | \\ \mathbb{F} \end{array}$$

¿Es esta igualdad cierta en general? sí

caso general: $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad afín irreducible

$p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ La parte lineal de $f \in F[x_1, \dots, x_n]$ en p se define como

$$f_p^{(1)} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)\,(x_j - a_j)$$

Def: El espacio tangente a V en $p \in V$ se define como

$$T_p V := \bigcap_{f \in I(V)} V(f_p^{(1)}) \subseteq \mathbb{A}^n$$

subespacio lineal

Eg: (cuártica reglada en $\mathbb{A}^3$.)

$$V = \{3x^2y^2 - 4x^3z - 4y^3 + 6xyz - z^2 = 0\} \subseteq \mathbb{A}^3$$

Tarea: ✓ $V_{sing} = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{A}^1\}$

```
A3 = QQ[x,y,z];

V = ideal(3*x^2*y^2 - 4*x^3*z - 4*y^3 + 6*x*y*z - z^2)

          2 2      3      3              2
ideal(3x y  - 4x z - 4y  + 6x*y*z - z )

Ideal of A3

Vsing = trim ideal singularLocus V

            2     2          2      2            3
ideal (x*y  - 2x z + y*z, x y - 2y  + x*z, 2x  - 3x*y + z)

Ideal of A3

saturate oo

            2     2          2      2            3
ideal (x*y  - 2x z + y*z, x y - 2y  + x*z, 2x  - 3x*y + z)

Ideal of A3

codim Vsing

2
```

```
C = ideal(y-x^2,z-x^3)

             2          3
ideal (- x  + y, - x  + z)

Ideal of A3

isSubset(V, C)

true

C == Vsing

false

radical Vsing

           2       3
ideal (x  - y, x  - z)

Ideal of A3

: C == radical Vsing

= true
```