

Geometría algebraica I  
15 abril.

Ayer:  $T_p X$  con  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  hipersuperficie  
irred.

$X$  es genericamente suave.

Hoy: Caso general:  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  Variedad afín.  
= IRREDUCIBLE =  
¿ es  $X$  genericamente suave?  
— n —

↓  
Ingredientes:

$$p \in \mathbb{A}^n \\ \text{"} \\ (a_1, \dots, a_n)$$

— 1 —  
 $f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ ; La parte lineal  
de  $f$  en  $p$  se define como

$$f_p^{(1)} := \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) (x_j - a_j)$$

Def. El espacio tangente de  $X$  en  $p$

$$T_p X := \bigcap_{f \in I(X)} \mathcal{V}(f_p^{(1)}) \subseteq \mathbb{A}^n$$

↖ Espacio lineal

Proposición: La función  $X \rightarrow \mathbb{N}$   
 $p \mapsto \dim T_p X$

es semi-continua superior en la topología de Zariski  
i.e.  $\forall r \in \mathbb{N}$ .

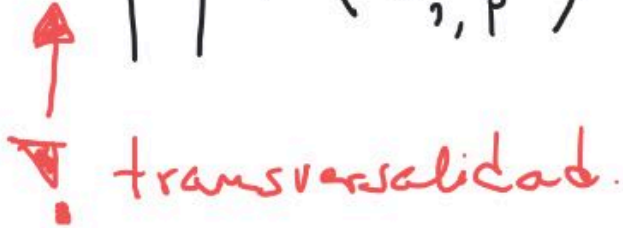
$$S_r(X) := \{p \in X \mid \dim T_p X \geq r\}$$

es cerrado.

Demostración:  $g_1, \dots, g_m$  generadores de  $I(X)$

$$\left[ f \in I(X) \Rightarrow f_p^{(1)} \text{ es combinación lineal de } g_p^{(1)} \text{'s.} \right]$$

Entonces,  $T_p X = \bigcap_{i=1}^m V(g_{i,P}^{(n)}) \subseteq \tilde{A}^n$


  
 transversalidad.

$$\Rightarrow \dim T_p X = n - \text{rango} \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} (p)$$

$$\Rightarrow p \in S_r(X) \Leftrightarrow \text{rango} \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \leq n - r.$$

$$\Leftrightarrow \text{menores } (n-r) \text{ son cero}$$

$$\det(\text{Bloques } (n-r) \times (n-r))$$

$\Rightarrow S$  es cerrado.



Corolario:  $X \subseteq \mathbb{A}^m$  Variedad afín irred.

$\Rightarrow \exists U \subseteq X$  tal que  
abierto

$$\dim T_p X \equiv \text{CTE}$$

$\forall p \in U$ .

rango  
max de  
 $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$

Argumento:

Cada menor de  $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j}$  es un polinomio

y hay una cantidad finita de ellos.

$$U = V(\text{menores})^c$$

—||—

Teorema:  $\dim X = \dim T_p X$  con  $p \in X$

genérico  
(p.e. 25)

Demostración ①

$T_p X \subseteq \mathbb{A}^n$  espacio lineal

considerar  $\Lambda$  espacio lineal genérico de  $\mathbb{A}^n$   
de dim complementaria a  $T_p X - 1$ .

i.e.

$$\dim \Lambda = n - \dim T_p X - 1.$$

notar  
tal que

$$\Lambda \cap T_p X = \emptyset$$

$\mathcal{F} := \left\{ \text{subespacios lineales de } \mathbb{A}^n \text{ que} \right\}$   
contienen a  $\Delta$   
de dimensión  $n - \dim T_p X$ .

$$H \in \mathcal{F} \Rightarrow \dim H \cap T_p X \geq 0$$

y si  $H$  es general  $\Rightarrow H \cap T_p X = \emptyset$

y además.

$$|H \cap X| < \infty$$



Argumento:  $X$  está definida por al menos  $\leq l$   
tantas ecuaciones como su codim.

$I(X)|_H$   $\leftarrow$  son al menos  $l$  ecuaciones  
en un espacio lineal de  
 $\dim H = n - \dim T_p X \leq \text{codim}(X)$   
 $\leq l$

$\Rightarrow$  si  $H$  es  
general  $V(I(X)|_H)$  es a lo más  
finito.



Por lo tanto obtenemos un morfismo finito mediante  $H$ 's.

$$F_H : X \dashrightarrow T_p X \quad \text{finito}$$

$$H \cap X \longrightarrow H \cap T_p X$$

$\Rightarrow$   $\left. \begin{array}{c} F(X) \\ | \end{array} \right\}$  extensión finita de campos

$\left. \begin{array}{c} F(T_p X) \\ | \\ F \end{array} \right\}$  transcendente de grado  $\dim X$ .  
 Noether  $\rightarrow$

Por lo tanto  $\dim X = \dim T_p X$

$$\begin{array}{ccc}
 F[x] & \xrightarrow{\quad} & F(x) \\
 | & & | \\
 F[y_1, \dots, y_m] & \xrightarrow{\quad} & F(\underline{\Delta})
 \end{array}$$

Dado  $F[x] \ni y_1, \dots, y_m$   
 $m \leq n$  alg indep.

tal que

$F[x]$  es un

$F[y_1, \dots, y_m]$ -módulo

fin. generado

$\Rightarrow$

$\swarrow$   
 Noether

$\downarrow$