Geometría algebraica I

15 abril.

Ayer: $T_p X$ con $X \subseteq \mathbb{A}^n$ hipersuperficie irred.

X es genericamente suave.

Hoy: Caso general: $X \subseteq \mathbb{A}^n$ Variedad afín. =IRREDUCIBLE=

¿ es X genéricamente suave?

—— // ——

— 1 —

Ingredientes:

$p \in \mathbb{A}^n$

$\shortparallel$

$(a_1, \dots, a_n)$

$f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$; La parte lineal de f en p se define como

$$f_p^{(1)} := \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)(x_j - a_j)$$

Def.- El espacio tangente de X en p

$$T_p X := \bigcap_{f \in I(X)} V(f_p^{(1)}) \subseteq \mathbb{A}^n.$$

Espacio lineal

Proposición: La función $X \longrightarrow \mathbb{N}$
$$p \longmapsto \dim T_p X$$
es semi-continua superior en la topología de Zariski

i.e. $\forall\ r \in \mathbb{N}$.

$$S_r(X) := \{ p \in X \mid \dim T_p X \geq r \}$$

es cerrado.

Demostración: $g_1, \ldots, g_m$ generadores de $I(X)$

$\left[f \in I(X) \Rightarrow f_p^{(1)} \text{ es combinación lineal de } g_p^{(1)}\text{'s} \right]$

Entonces, $T_p X = \bigcap^{m} V(g^{(1)}_{i,p}) \subseteq \mathbb{A}^{n}$

transversalidad.

$$\Rightarrow \dim T_p X = n - \text{rango}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}$$

$$\Rightarrow p \in S_r(X) \iff \text{rango}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} \leq n-r.$$

$\iff \underbrace{\text{menores}}_{\det(\text{Bloques } (n-r)\times(n-r))}$ $(n-r)$ son cero

$\Rightarrow S_r$ es cerrado.

$\square$

Corolario: $X \subseteq \mathbb{A}^n$ Variedad afín irred.

$\Rightarrow \exists\ U \subseteq X$ tal que
abierto

$$\dim T_p X \equiv CTE \quad \forall p \in U.$$

rango max de $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)$

Argumento: Cada menor de $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ es un polinomi y hay una cantidad finita de ellos

$$U = V(\text{menores})^c.$$

— // —

Teorema: $\dim X = \dim T_p X$ con $p \in X$ genérico. ($p \in U$)

Demostración ①

$$T_p X \subseteq \mathbb{A}^n \quad \text{espacio lineal}$$

considerar Λ espacio lineal genérico de $\mathbb{A}^n$ de dim complementaria a $T_p X - 1$.

i.e.

$$\dim \Lambda = n - \dim T_p X - 1.$$

notar $\Lambda \cap T_p X = \emptyset$

tal que

$\mathcal{F} := \{$ subespacios lineales de $\mathbb{A}^n$ que contienen a Δ $\}$ de dimensión $n - \dim T_pX$.

$$H \in \mathcal{F} \Rightarrow \dim H \cap T_pX \geq 0$$

y si H es general $\Rightarrow$ $H \cap T_pX = p$

y además.

$$|H \cap X| < \infty$$

Argumento: X está definida por almenos $= l$ tantas ecuaciones como su codim.

$I(X)|_H$ ← son almenos l ecuaciones en un espacio lineal de $\dim H = n - \dim T_p X \leq \operatorname{codim}(X) \leq l$

$\Rightarrow$ si H es general $V\left(I(X)|_H\right)$ es a lo más finito.

Por lo tanto obtenemos un morfismo finito mediante H's.

$$F_H : X \dashrightarrow T_pX \qquad \text{finito}$$

$$H \cap X \longmapsto H \cap T_pX$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} \mathbb{F}(X) \\ | \\ \mathbb{F}(T_pX) \\ | \\ \mathbb{F} \end{array} \quad \begin{array}{l} \} \text{ extensión finita de campos} \\ \} \text{ trascendente de grado } \dim X \end{array}$$

Noether

Por lo tanto $\dim X = \dim T_pX$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}[X] \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{F}(X) \arrow[d, dash] \\
\mathbb{F}[y_1, \dots, y_m] \arrow[r, dash] & \mathbb{F}(\underline{\Delta})
\end{tikzcd}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{Dado } \mathbb{F}[X] \ \exists\ y_1, \dots, y_m \\
\qquad m \leq n \quad \text{alg indep.} \\
\text{tal que} \\
\mathbb{F}[X] \text{ es un} \\
\qquad \mathbb{F}[y_1, \dots, y_m]\text{-módulo} \\
\qquad\quad \text{fin. generado}
\end{array}\right\} \text{Noether}
$$

$\Rightarrow$