Addendum: $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ Variedades afines irreducibles que contienen cada una abiertos $\mathcal{V} \subseteq V$ & $\mathcal{V}' \subseteq W$.

1) Un morfismo $f: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ es una aplicación racional $f: V \dashrightarrow W$ con $\mathrm{dom}(f) \supseteq \mathcal{V}$ y $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}'$.

2) Un morfismo $f: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ es un isomorfismo si existe $g: \mathcal{V}' \longrightarrow \mathcal{V}$ morfismo con $f(g) = Id_{\mathcal{V}}$ & $g(f) = Id_{\mathcal{V}'}$.

3) Una aplicación racional $f: V \dashrightarrow W$ se dice birracional si existe una aplicación racional $g: W \dashrightarrow V$ tal que $g(f) = Id_W$ & $f(g) = Id_V$.

# Geometría algebraica I

20 abril.

Ayer: $\dim X = \dim T_p X$ con $p$ genérico.

argumento incompleto.
usando directamente
el Teorema de Noether.

Hoy: $\dim X = \dim T_p X$

usando diferenciales.

—— " ——

Hulek: pág 103

Hartshorne: pág 27.

Demostración ②:

* $X$ es birracional a una hipersuperficie en $\mathbb{A}^m$ para algun $m$.

* Aplicaciones birracionales preservan $\dim X$.

* " " " " " $T_pX$. $(\dim T_p X)$

—— /. ——

$T_pX$ se definió usando las ecuaciones de $X$

si $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación

no es claro que existe una aplicación

$$d_pf: T_pX \longrightarrow T_{f(p)}Y \quad .$$

objetivo: definir $T_pX$ en términos del $\mathbb{F}[X]$ &

" $d_pf$: la diferencial de $f$ en $p$.

$f \in \mathbb{F}[x_1, \dots x_n]$ $\qquad f_p^{(1)} := \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)(x_j - p_j)$

$= d_p f$ = diferencial de $f$.

Propiedades:

$$d_p(f+g) = d_p f + d_p g$$

$$d_p(fg) = f(p) d_p g + g(p) d_p f.$$

si calculamos la expansión de Taylor de $f$ en $p$

$$f = f(p) + \underbrace{f_p^{(1)} + f_p^{(2)} + \cdots + f_p^{(n)}}_{\text{polinomios homogéneos de grado } d.}$$

Recordar:

$$\boxed{T_p V := \bigcap_{f \in I(V)} V(d_p f)}$$

Si $\quad F = a_1 F_1 + \cdots + a_m F_m \quad$ con $\quad I(V) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle$

$$d_p F = a_1(p)\, \underline{\underline{d F_1}} + \cdots + a_m(p)\, \underline{\underline{d F_m}}$$

$$\Rightarrow \quad T_p V = \bigcap_{i=1}^{m} V(d_p F_i) \qquad (*)$$

¿cómo escribo $T_pV$ en términos de $\mathbb{F}[V]$?

$$g \in \mathbb{F}[V]\,; \qquad g = G|_V \qquad G \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$$

$(*) \Rightarrow \; d_p g := d_p G|_{T_pV}$ está bien definido.

Por lo tanto obtenemos

$$d_p : \mathbb{F}[V] \longrightarrow \text{formas lineales en } T_pV = T_pV^*$$

$$g \longmapsto d_p g = d_p G|_{T_pV}$$

**Def.** El funcional lineal $d_p g$ es llamado diferencial de $g$ en $p$.

**observación:** $d_p : \mathbb{F}[V] \longrightarrow T_p^* V$ satisface
$g \longmapsto d_p g$ si $g \equiv \alpha \Rightarrow$
$d_p \alpha = 0$

$\Rightarrow$ podemos restringir $d_p$ a $\underbrace{m_p}_{\text{ideal maximal}} \subseteq \mathbb{F}[V]$

i.e.

$$d_p : \underset{\{f \in \mathbb{F}[V] \mid f(p)=0\}}{\overset{}{m_p}} \longrightarrow T_p^* V$$

$m_p = \{f \in \mathbb{F}[V] \mid f(p)=0\}$.

pues $d_p$ sólo "ve" funciones sin término constante.

**Teorema:** $d_p : m_p \longrightarrow T_p^* V$
$g \longmapsto d_p g$

es suprayectivo y tiene kernel $m_p^2$.

Es decir, $m_p / m_p^2 \xrightarrow{\cong} T_p^* V$.

<u>Demostración</u>: sobreyectividad: $\varphi \in T_p^* V$ Eg:

$\Rightarrow$ $\varphi$ es un polinomio homogéneo de grado 1 en $T_pV$.

$\Rightarrow f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ con $f = f(p) + \varphi + \cdots$

$$d_p f = \varphi.$$

<u>Kernel</u>: $p = (0, \ldots, 0)$ y supongamos $d_p g = 0$

con $g \in \mathbb{F}[V]$. $= d_p G|_{T_pV}$

con $G \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$.

Por lo tanto:

$$d_p G = \lambda_1 d_p F_1 + \cdots + \lambda_m d_p F_m$$

con $I(V) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle$.

Escribamos: $G_1 := G - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 - \cdots - \lambda_n F_n$.

$\lambda_j \in \mathbb{F}$

$\Rightarrow$ $G_1$ no tiene término constante.

pues $g \in m_p$ $\left( g(0) = \underset{\text{Térm. CTE}}{\underline{\underline{0}}} \right)$

$G_1$ no tiene término lineal.

$\Rightarrow$ $G_1 \in (x_1, \dots x_n)^2$.

Notar $G_1|_V = G|_V = g$ $\Rightarrow$ $g \in (t_1, \dots, t_n)^2$

$x_i|_V = t_i$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} d_p = m_p^2$ $\boxed{3}$

<u>CORO</u> $$T_p V = \left( m_p / m_p^2 \right)^*.$$

<u>Def.</u>- A este espacio se le llama espacio tangente de Zariski.