Geometría algebraica I

22 abril

Ayer: espacio tangente $\left(m_p/m_p^2\right)^* = T_pV$

Hoy: **Teorema**: $\dim X = \dim T_pX$ si p es un punto no-singular de X variedad afín irreducible.

Ingredientes de la prueba (de nuevo):

1) $X \underset{g}{\dashrightarrow} Y \subseteq \mathbb{A}^n$ birracional g & Y hipersuperficie

pag 103 Hulek
27 Hartshorne

2) g preserva la dimensión:
(tarea) $\dim X = \dim Y$.

3) g preserva espacios tangentes. ← T_pX en términos de $\mathbb{F}[X]$.

i) definición intrínseca de T_pX. ✓

ii) $\exists$ la diferencial de g: $T_pX \xrightarrow[\cong]{} T_{g(p)}Y$.

— " —

ii) $f: X \longrightarrow Y$ aplicación regular de variedades afines irreducibles.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \cup & & \cup \\ p & & f(p) = q \end{array}$$

$f^*: \mathbb{F}[Y] \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}[X]$ satisface

$$f^*(\mathfrak{m}_q) \subseteq \mathfrak{m}_p$$

$$f^*(\mathfrak{m}_q^2) \subseteq \mathfrak{m}_p^2 \quad !$$

$$\Rightarrow \exists \quad f^*: \mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2 \longrightarrow \underbrace{\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2}_{\text{espacio vectorial}}$$

tomando duales:

$$d_p f: \left(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\right)^* \longrightarrow \left(\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2\right)^*$$

diferencial de f en p.

CORolario: si f es un isomorfismo

$\Rightarrow$ $d_p f$ es un isomorfismo.

df_p se puede definir de manera local; para aplicaciones racionales.

Def: $X = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad irreducible afín
$p \in X$

El anillo local $\mathcal{O}_{X,p}$ de $p \in X$ se define de cualquiera de las siguientes 3 maneras:

1) $\mathcal{O}_{X,p} :=$ Anillo de funciones racionales $h/z \in \mathbb{F}(X)$ con $z(p) \neq 0$.

2) $=$ localización de $\mathbb{F}[X]$ en el conjunto multiplicativo de z, $z(p) \neq 0$.

3) $=$ Anillo de gérmenes $U \to \mathbb{C}$ con $p \in U$ z-abierto definidos por h/z $z(p) \neq 0$.

Teorema: El espacio tangente T_pX es un invariante local del punto $p \in X$. En otras palabras

$$T_p X = \left(\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \right)^* \quad \text{donde}$$

$\mathfrak{m}_p$ es el ideal maximal $\mathfrak{m}_p \subseteq \mathcal{O}_{X,p}$.

```
A4 = QQ[a,b,c,d];

S = ideal(c*d-b,b*c-a,b^2-a*d)

                              2
ideal (c*d - b, b*c - a, b  - a*d)

Ideal of A4

Punto = ideal(b-6,a-12,c-2,d-3) -- Punto = (12,6,2,3)

ideal (b - 6, a - 12, c - 2, d - 3)

Ideal of A4

isSubset(S, Punto) --Punto esta en la superficie S

true

FFS = A4/S;

Punto = ideal(b-6,a-12,c-2,d-3) -- redefinimos Punto ahora en  S

ideal (b - 6, a - 12, c - 2, d - 3)

Ideal of FFS

TpS = gens image basis(1,Punto/Punto^2) -- generadores del esp vect TpS

| b-6 a-12 |

          1         2
Matrix FFS  <--- FFS
```