Teorema: El espacio tangente T_pX es un invariante local del punto $p\in X$. En otras palabras

$$T_pX \cong \left(\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \right)^* \quad \text{donde}$$

$\mathfrak{m}_p$ es el ideal maximal $\mathfrak{m}_p \subseteq \mathcal{O}_{X,p}$.

27 de abril

Mostremos cómo definir T_pX a partir del anillo local $\mathcal{O}_{X,p}$

Recordar: $d_p\left(\frac{F}{G}\right) := \dfrac{G(p)\, d_pF - F(p)\, d_pG}{G^2(p)}$

funciones racionales $f \in \mathcal{O}_{X,p} \subseteq \mathbb{F}(X)$
son restricciones de F/G
a X ; $F, G \in \mathbb{F}[\mathbb{A}^n]$.

definamos $d_pf := d_p(F/G)\big|_{T_pX}$

$$\begin{array}{ccc} d_pf & \mathbb{F}[X] \longrightarrow T_p^*X \\ & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \nearrow & \\ & \mathfrak{m}_p & \end{array}$$

Todos los argumentos* de la clase pasada funcionan:

$$d_p : \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow T_p^*X$$

$\{f \in \mathcal{O}_{X,p} \mid f(p) = 0\}$ $\qquad f \longmapsto d_pf$ ← ¡clase de hoy!

''

donde $\mathfrak{m}_p \subseteq \mathcal{O}_{X,p}$ ideal maximal

$$\Rightarrow \qquad T_p X \cong \left(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\right)^* .$$

Def: X irreducible $\quad s := \min\{\dim T_p X \mid p \in X\}$

p es no-singular en X si $\dim T_p X = s$.

de lo contrario, p se dice singular.

Reformulando Teorema: $\dim T_p X = \dim X$ si

p es no-singular.

Demostración: $\exists\ X \xrightarrow{f} Y \subseteq \mathbb{A}^m$ biracional &

con Y hipersuperficie.

Hulek ~~103~~ & Hartshorne pag 27

i.e $\exists$ abiertos densos $U \subseteq X$ & $V \subseteq Y$ tal que

$f: U \longrightarrow V$ es isomorfismo.

— (1)

$$\Rightarrow \quad f^*: \mathcal{O}_{Y,q} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{X,p} \quad \text{donde} \quad f(p) = q$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y,q} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}_{X,p} \\ \| & & \| \\ \mathbb{F}[Y] & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{F}[X] \\ \| \, {}^{\mathfrak{m}_q} & & \| \, {}^{\mathfrak{m}_p} \\ \mathbb{F}[V] & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{F}[U] \end{array}$$

$$p \in \underbrace{U \cap \underset{\text{CTE}}{T_pX}}_{\text{abierto en } X} \cap \overset{\text{III}}{Z} \qquad \overset{-1}{f}\big(\overset{Y}{\text{suave}}\big)$$

!

$$\Rightarrow$$

$$df: T_pX \xrightarrow{\cong} T_qY$$

2

Por tanto $\dim T_qY = \dim T_pX$

$\dim Y \underset{q = \text{no-sing}}{=}$

Sabemos (f birracional) $\dim X = \dim Y$

3

$\Rightarrow \quad \dim X = \dim T_pX$ con p en un abierto denso.

$\blacksquare$

Comentario: X irred se dice genericamente suave si $\exists\, U \subseteq X$ abierto denso cuyos puntos son no-singulares.

Eg: $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ = Espacio Vectorial

ideal $= I_S$

$\mathbb{F}[a,b,c,d] \supseteq I(\underbrace{c \cdot d - b}_{g_1}, \underbrace{bc - a}_{g_2}, \underbrace{b^2 - ad}_{g_3})$

$$S = Var(I_S) \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{F}}.$$

alternativamente

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^2 &\xrightarrow{f} \mathbb{A}^4 \\ (c,d) &\longmapsto (c^2 d, cd, c, d) \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(f) = S$

Diferencial de GD.

$T_q S = \mathrm{Im}\, d_p f$

$f(p) = q$

$$T_p S = \bigcap_{j=1}^{3} V(g^{(1)}_{p,j}) \xrightarrow{\cong} T_p \cong \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$$

DP ...

$$D_p f = \begin{pmatrix} 2cd & c^2 \\ d & c \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : T_p \mathbb{A}^2 \longrightarrow T_q S$$

$$\underset{v_1}{\shortparallel} \qquad \underset{v_2}{\shortparallel} \qquad\qquad T_q S = \mathcal{L}(v_1, v_2)$$

$D_p f$ tiene rango 2

$\mathcal{L}(v_1, v_2)$ generado lineal

Dado $q \in S$ es no-singular

$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}(D_p f) = T_q S.$ (trasladado)

Por otro lado, si $q = (2,2,1,2)$

$$\mathfrak{m}_q = \langle a-2, b-2, c-1, d-2 \rangle \subseteq \mathbb{F}[\mathbb{A}^4]$$

$$\downarrow \pi$$

$$\mathfrak{m}_q \xrightarrow{\pi} \mathfrak{m}_q \subseteq \mathbb{F}[S]$$

ideal maximal

Calculamos:

$$\mathfrak{m}_q / \mathfrak{m}_q^2 = \mathcal{L}(a-2 ; b-2)$$ espacio vectorial de dimensión 2.

más aún

$$\mathbb{F}[S] \supseteq \mathfrak{m}_q = \langle a-2, b-2 \rangle$$ está generado por 2 polinomios.

i.e. $q \in S$ se define con 2 ecuaciones (y no 4).

```
: A4 = QQ[a,b,c,d];

: P1 = ideal(a-2,b-2,c-1,d-2);

: Ideal of A4

: S = ideal(c*d-b,b*c-a,b^2-a*d);

: Ideal of A4

: FFS = A4/S

= FFS

: QuotientRing

: P1 = ideal(a-2,b-2,c-1,d-2);

: Ideal of FFS

: basis(P1/P1^2)

= {1} | 1 0 |
  {1} | 0 1 |
  {1} | 0 0 |
  {1} | 0 0 |

: Matrix
```

```
: gens image basis(1,P1/P1^2)

= | a-2 b-2 |

               1          2
: Matrix FFS  <--- FFS

: gens image basis(2,P1/P1^2)

= 0

               1
: Matrix FFS  <--- 0

: gens image basis(1,P1/P1^2)

= | a-2 b-2 |

               1          2
: Matrix FFS  <--- FFS

: I = ideal(a-2,b-2)

= ideal (a - 2, b - 2)

: Ideal of FFS

: I == P1

= true

: -- moraleja: a-2, b-2 generan al ideal maxima MM_p donde p=(2,2,1,2)
```