Geometría algebraica I

29 abril

Ayer: $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad afín irred
es genericamente suave.

↳ si p es suave en $Y \subseteq X$
y Y tiene codimensión 1
$\boxed{!?}$ $\Rightarrow$ Y localmente está definida
por una sola ecuación.

Hoy: Variedades Projectivas: $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$

Segunda clase: $\mathbb{P}(\mathbb{A}^2) := \mathbb{A}^2 \sqcup [\ell] \quad \forall\, \ell \subseteq \mathbb{A}^2$ línea

una línea en $\mathbb{P}(\mathbb{A}^2)$: 1) $\ell \cup [\ell]$
2) todos los $[\ell]$; $\ell \subseteq \mathbb{A}^2$ línea

= No hay coordenadas = (puesto que $\mathbb{A}^2$ no tiene coordenadas)

En lo que sigue: $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}) := \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$

← tendrá coordenadas

① **Def.-** $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}} := \left\{ \underbrace{[a_0 : \cdots : a_n]}_{\text{coordenadas globales}} \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, a_j \neq 0 \quad \& \\ \mathbb{A}^{n+1} \ni (a_0, \ldots, a_n) \sim (\lambda a_0, \ldots \lambda a_n) \\ \lambda \in \mathbb{F}^* \end{array} \right\}$

② Conjunto de todas las líneas que pasan por el origen en $\mathbb{F}^{n+1}$.

③ $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ La esfera unitaria en $\mathbb{C}^{n+1}$

$$S^n = \left\{ (a_0, \ldots, a_n) \;\middle|\; \Sigma |a_j|^2 = 1 \right\}$$

módulo $(a_0, \ldots, a_n) \sim (e^{i\theta} a_0, \ldots, e^{i\theta} a_n)$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

OBSERVACIONES: ③ $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ es compacto y por tanto todos sus subconjuntos cerrados son compactos.

① $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$ es $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$ + "hiperplano al infinito"

Eg: $\mathbb{P}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}}) = \mathbb{A}^2 + [\ell]$; $\ell \subseteq \mathbb{A}^2$ línea

Específicamente:

$$H_j = \{ \underset{[a_0 : \cdots : a_n]}{p} \in \mathbb{P}^n \mid a_j = 0 \}$$

$$\mathbb{P}^n \setminus H_j \cong \mathbb{A}^n$$

$$[a_0 : \cdots : a_n] \longmapsto \left(\frac{a_0}{a_j}, \cdots \frac{a_{j-1}}{a_j}, \frac{a_{j+1}}{a_j}, \cdots \frac{a_n}{a_j} \right)$$

Notar: $H_j \cong \mathbb{P}^{n-1} = \{ [a_0 : \cdots \widehat{a_j} \cdots : a_n] \}$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}} = \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}} + \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{F}}$$

Más aún $\bigcap_{j=0}^{n} H_j = \emptyset$ pues $[0 : \cdots : 0] \notin \mathbb{P}^n$

$$\Rightarrow \quad \bigcup_{j=0}^{n} (\mathbb{P}^n \setminus H_j) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$$ cubierta "abierta"

Eg: $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ $\quad \overline{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{a+b+c=0\}} \cong \mathbb{C}^2 = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

¿Qué pasa si el grado ≥ 2?

$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) = ¿?$

② $\overset{\substack{\text{caso} \\ n=2}}{\Rightarrow}$.

$[x:y:z] = \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}} := \left\{ \begin{matrix} 1\text{-subespacios} \\ \text{de } \mathbb{F}^3 \end{matrix} \right\}$

3 parametros

$$= \left\{ \underbrace{\mathrm{Var}\begin{pmatrix} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{pmatrix}}_{} \right\}$$

↳ 1 punto en $\mathbb{P}^2$

necesita 6 parametros

violeta: ∃ Redundancia ! ¿Cómo la eliminamos?

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \;\middle|\; \text{rango } 2 \right\}$$

$$= \left\{ [ab'-a'b : ac'-a'c : bc'-b'c] \right\}$$

$$= \left\{ [x : y : z] \right\}$$

Las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$ son globales. $\mathbb{P}^n = \{ [a_0 : \cdots a_n] \mid \prod a_j \neq 0 \}$