Geometría algebraica I

18 feb.

Ayer: Geometría de incidencia
&
Plano Afín $\mathbb{A}^2$

Hoy: Plano Projectivo $\mathbb{P}^2$ (sin coordenadas)
&
¿Es $\mathbb{A}^2 \cong \mathbb{A}^2_{\mathbb{F}}$ para un campo $\mathbb{F}$?

Def: Un plano proyectivo es un conj cuyos elementos son llamados puntos y un conjunto de subconjuntos llamados líneas que satisfacen:

P1. Dos pts distintos A y B yacen en una única línea.

P2. $\exists$ 3 pts no colineales

P3.- Toda línea contiene al menos 3 pts

P4.- Cualesquiera par de líneas se intersecan en un pt.

Satisface los axiomas de geometría de incidencia.

—//—

Tarea: Paralelismo en $\mathbb{A}^2$ es una relación de equivalencia.

Construcción (Proyectivizar $\mathbb{A}^2$)

"añadir a $\mathbb{A}^2$ una línea al ∞"

Def.- ① Un pincel de líneas paralelas a $l \subseteq \mathbb{A}^2$ es el conjunto de todas las líneas paralelas a l.

② $l \subseteq \mathbb{A}^2$, escribimos $[l]$ a la clase de eq. de pinceles de parale a l.

$[\ell]$ = puntos ideales ó pt. al "∞".

La projectivización de $\mathbb{A}^2$ denotada $\mathbb{P}(\mathbb{A}^2)$ es un conjunto cuyos elementos son:

puntos de $\mathbb{A}^2$ $+ [\ell]$ $\forall\ \ell \subseteq \mathbb{A}^2$.

Una línea en $\mathbb{P}(\mathbb{A}^2)$ es:

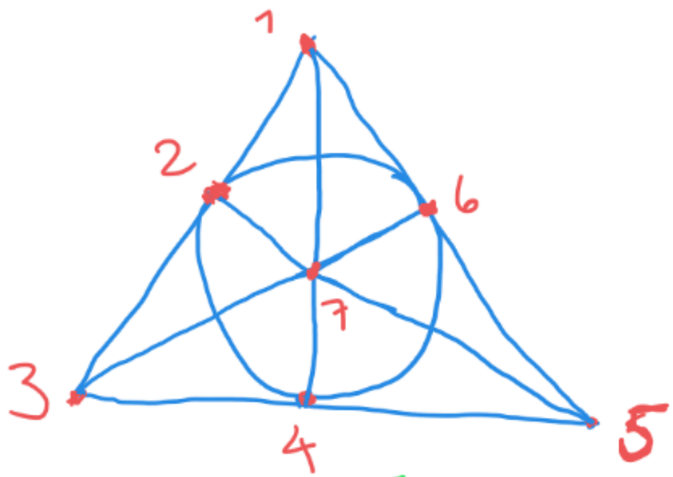
1) $\ell \cup [\ell]$ ó 2) Todos los $[\ell]$; $\ell \subseteq \mathbb{A}^2$.

Tarea: Verificar $\mathbb{P}(\mathbb{A}^2)$ satisface P1 – P4.

Eg ① $\mathbb{F}_2$ = campo com 2 elementos.

$\mathbb{F}_2^2$ = plano afín 4 elementos

$\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^2)$ plano projectivo con 7 pts



Plano Fano

$$\underbrace{\left|\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_2}))\right|}_{\text{gp simple}} = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

$\exists\ \varphi \in \mathrm{Aut}$ de orden 2

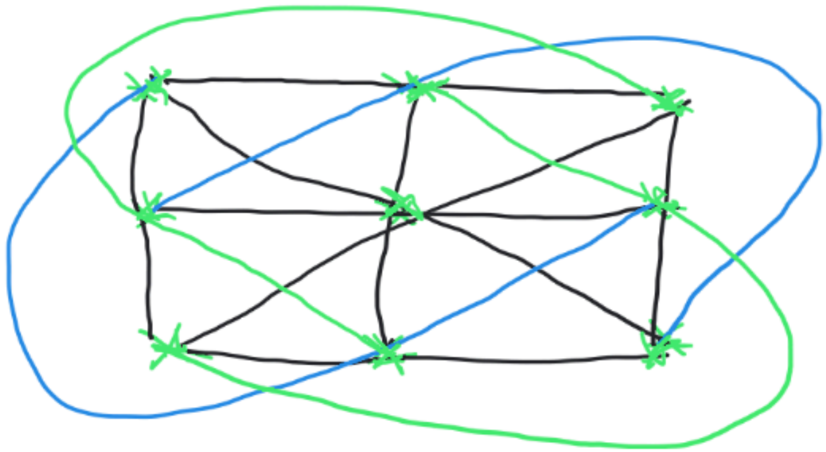
$\exists\ \tau \in \mathrm{Aut}$ de orden 3

$\exists\ \rho \in \mathrm{Aut}$ de orden 7

Tarea: $\mathrm{Aut} \underset{\text{geo}}{\cong} GL_3(\mathbb{F}_2) \cong PSL_2(\mathbb{F}_7)$

Eg ② $\mathbb{F}_3$ = Campo con 3 elementos

$\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_3} = \mathbb{F}_3^2$ = plano afín con 9 pts



~~4~~ 12 líneas

$|\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_3})| = 9 \cdot 8 \cdot 6 = 432$

¡¡este es soluble!!

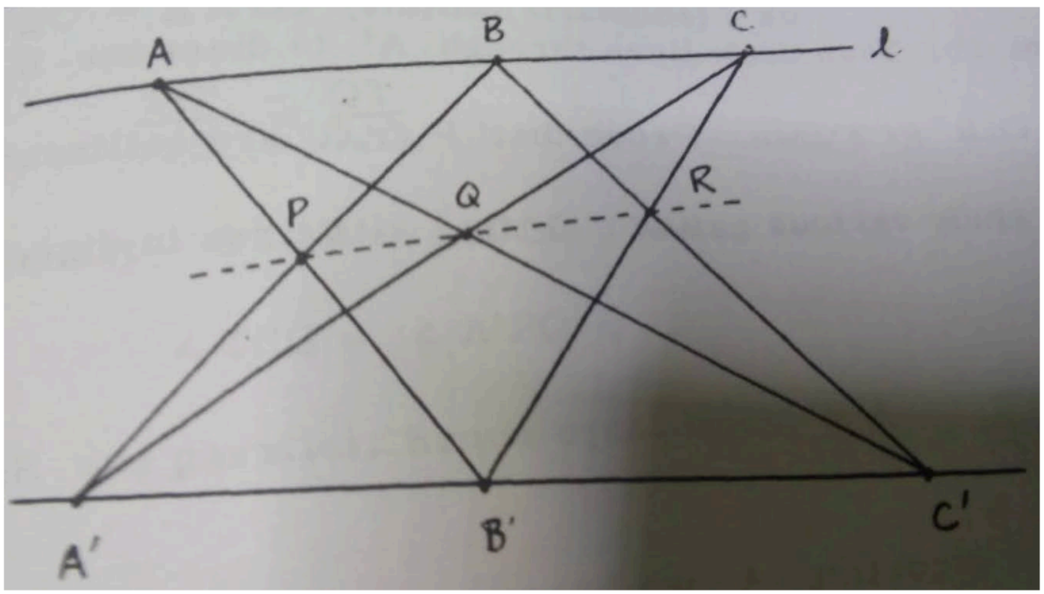
Tarea: ¿Cuál es el orden de $|\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_3}))|$?

¿ " " $|\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_4}))|$?

en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

Teorema (Pappus) en gral no se sigue de P1–P4.

Considerar ℓ, ℓ' líneas distintas en $\mathbb{P}^2$ y $A, B, C \in \ell$ $\quad A', B', C' \in \ell'$.



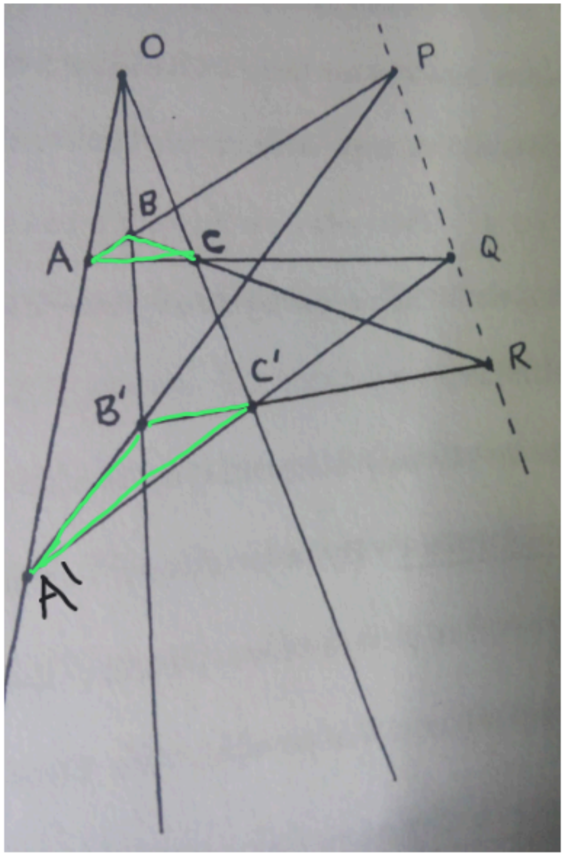
Entonces

P, Q, R

son

ℓ' colineales.

Teorema (Desargues)



Considerar 2 triángulos ABC & $A'B'C'$ en perspectiva

entonces:

$$P = AB \cdot A'B'$$
$$Q = BC \cdot B'C'$$
$$R = AC \cdot A'C'$$

son colineales.

¿Cuándo $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}^2_{\mathbb{F}}$? **Próxima clase:**

¿Cuándo $\mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}} := \mathbb{P}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}})$?