Geometría algebraica I

4 mayo

Ayer: Espacio projectivo/$\mathbb{F}$: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$

Hoy: Variedades projectivas localmente son Variedades afines

Def: Una Variedad projectiva es:

$$V(f_1, \ldots, f_N) = \{ p \in \mathbb{P}^n \mid f_1(p) = \cdots = f_N(p) = 0 \}$$

donde f_j's son polinomios homogéneos.

$f \in \mathbb{F}[x_0, \dots, x_n]$ es homogéneo

si $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$

Eg: $f(x,y,z) = x^3 + y^2 z - z^3$

No ejemplo: $g(x,y,z) = x^3 + y + 1$.

El ideal $I = \langle f_1, \dots, f_N \rangle$ es homogéneo

$\Leftarrow$

i.e., si $g = \sum \alpha_i g_i$ $\quad g_i$ es homogéneo

$\Rightarrow g_i \in I \quad \forall i$.

También: $I = I^\lambda$; $I^\lambda := \{ f(\lambda x_0, \dots \lambda x_n) \mid f \in I \}$

Hecho: Un ideal homogéneo tiene un conjunto generador de polinomios homogéneos.

operaciones:

1) $V(\sum_{j\in S} I_j) = \bigcap_{j\in S} V(I_j)$

2) $V(I\cap J) = V(I)\cup V(J)$

3) si $I \subseteq J \Rightarrow V(I) \supseteq V(J)$

4) $V(I) = V(\sqrt{I})$ Nullstellensatz.

Aspectos distintos del caso afín:

1) Todos los ideales homogéneos están contenidos en $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$. &

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \emptyset .$$

Teorema: Para todo ideal homogéneo $I \subseteq \mathbb{F}[x_0, \ldots x_n]$ & $f \in I$ homogéneo de grado $d \geq 1$

$$f \in \sqrt{I} \iff f \text{ se anula en } V(I).$$

Coro: $V(I) = \emptyset \iff \sqrt{I} = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$.

Coro: $V(I) = \emptyset \iff \sqrt{I} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$.

Defi $\mathbb{F}[x_0, \dots, x_n]/I$ es el anillo coordenado proyectivo de $V(I) = V$.

¡OJO! $\mathbb{F}[V] = \mathcal{O}_V$ = func. Reg en V.

caso afín

$\ne$

$\mathbb{F}[x_0 \dots x_n]/I \neq$ funciones Regulares en V.

caso proyectivo.

Relación en Variedades afines y proyectivas

Proposición: Identificando $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \setminus H_0$ $= \{x_0 = 0\}$

a) $I \subseteq \mathbb{F}[x_0, \ldots, x_n]$ ideal homogéneo & primo.

$X := V(I)$ Entonces,

$X - X \cap H_0$ es afín $\subseteq \mathbb{A}^n$:

$$I(X - X \cap H_0) = \langle f(1, x_1, \ldots x_n) \mid f \in I \rangle .$$

Proposición: Identificando $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \setminus H_0$

a) $I \subseteq \mathbb{F}[x_0, \dots, x_n]$ ideal homogéneo & primo.

$X := V(I)$ Entonces,

$X - X \cap H_0$ es afín $\subseteq \mathbb{A}^n$:

$$I(X - X \cap H_0) = \langle f(1, x_1, \dots x_n) \mid f \in I \rangle$$

b) $J \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ ideal primo $W = V(J) \subseteq \mathbb{A}^n$

$\overline{W} \subseteq \mathbb{P}^n$ Variedad proyectiva

↳ cerradura de Zariski

$$\overline{W} = V(\tilde{J})$$

$$\hookrightarrow \tilde{J} = \left\{ \tilde{f}(x_0, \dots x_n) := x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots \frac{x_n}{x_0}\right) \middle| \text{ con } d := gr(f) \text{ \& } f \in J \right\}$$

Proyectivización de W.

Eg: $C = V(xy - z^2) \subseteq \mathbb{P}^2_{x,y,z}$ **sobre los reales**

en $U_0 = \mathbb{P}^2 \setminus H_0 = \mathbb{A}^2$

$$C_{afín, H_0} = V(\underbrace{y - z^2}_{f(y,z)}) \subseteq \mathbb{A}^2$$

Parábola conexa

$$\tilde{f}(x_0, x_1, x_2) := x_0^2 \left(\frac{x_1}{x_0} - \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 \right) = \underline{\underline{x_0 x_1 - x_2^2}}$$

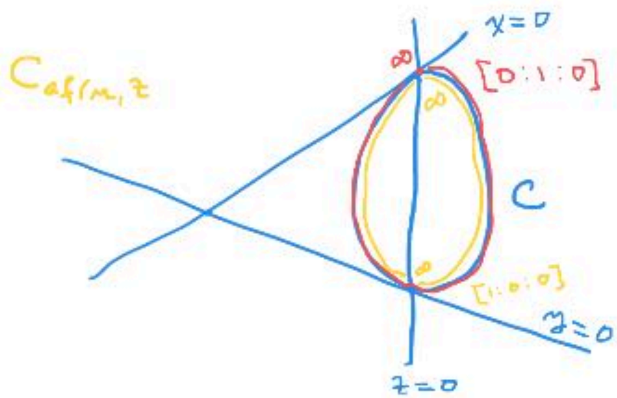
en $U_2 = \mathbb{P}^2 \setminus H_2 = \mathbb{A}^2$

$$C_{afín, H_2} = V(xy - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$$

hiperbola disconexa

Parábola: un punto al infinito: $C \cap \{x = 0\} = [0 : y : 0] = [0 : 1 : 0]$

hiperbola: 2 puntos al infinito: $C \cap \{z = 0\} = [1 : 0 : 0] \cup [0 : 1 : 0]$



$C_{afín, x_0}$

Guisselle: ¿Es $\mathbb{A}^m$ uma carta como en Geo Dif?

César: sí.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^1 \\ \cup\!\vert & & \cup\!\vert \\ U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus H_1 = \mathbb{A}^1 & & \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus H_0 = U_0 \\ \| & & \| \\ \left[\frac{x_0}{x_1} : 1\right] & & \left[1 : \frac{x_1}{x_0}\right] \end{array}$$

Cambio de coordemadas: $U_1 \cap U_0 \longrightarrow U_0 \cap U_1$

$$\frac{x_0}{x_1} \longmapsto \frac{x_1}{x_0}$$

NOTAR QUE

$U_0 \cap U_1 \cong \mathbb{A}^1 \setminus 0.$

$$z \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{F}[U_0 \cap U_1]$$