Geometría algebraica I

Hoy: "Repaso" Cónicas en $\mathbb{P}^2$.

<u>Def.</u>- $C = \{ V(f) \subseteq \mathbb{P}^2 \mid \deg f = d \}$

$:=$ curva plana de grado d

Eg: $d=2$ $C =$ cónica.

$d=3$ $C =$ cúbica plana

$\mathbb{P}^2$ admite la acción de $GL_3(\mathbb{F}) = G$

$$G \times \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$(g, [x:y:z]) \longmapsto [ax+by+cz : \cdots : a''x+b''y+c''z]$$

$$g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

Eslogan: Geo projectiva de curvas planas estudia propiedades de las curvas invariantes bajo la acción de $GL_3(\mathbb{F})$.

Eg: suavidad, irreducible....

Cónica: $C = V(f(x, y, z)) \subseteq \mathbb{P}^2$

$$= V\left(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \right)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

simétrica

$$C := \left\{ (x, y, z) \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

cambio de coordenadas

$$g \circ C := \{ f(ax+by+cz, \ldots, +c''z) = 0 \}$$

$$= \left\{ (x\ y\ z)\, g^t A g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Def: Dos curvas planas se dicen proyectivamente equivalentes si sus ecuaciones se pueden transformar la una en la otra mediante la acción de $g \in GL_3(\mathbb{F})$.

Moraleja: $\exists$ solo 3 cónicas hasta por equivalencia proyectiva:

1) $\{xy - z^2 = 0\}$ rango $A = 3$ 

2) $\{xy = 0\}$ rango $A = 2$ 

3) $\{y^2 = 0\}$ rango $A = 1$ 

Estrategia: $C \subseteq \mathbb{R}^2$ fíjate en A

si $|\det A| \neq 0 \Rightarrow \exists P \quad P A P^{-1} = \text{Diag}$

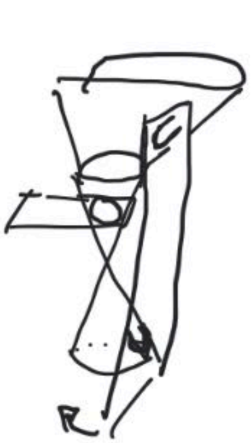
como A es simétrica P la podemos pensar ortogonal. $(P^t = P^{-1})$

$$\Rightarrow \boxed{A = P^t \, \text{Diag} \, P}$$

$$\hookrightarrow D = V(ax^2 + by^2 + cz^2)$$

tarea: controlar a b c.

CORO: Una cónica es singular $\Leftrightarrow$ es reducible.



Dem: si rango de A es 3 $\Longleftrightarrow$ C es suave

si rango $\underline{\underline{rg(A) \leq 2}}$ $\Longleftrightarrow$ C es $\underline{\underline{\text{singular}}}$

——— // ——— // ———

¿En gral? ¿En $\mathbb{P}^3$?

sí

si $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ rango 4 $\overset{¿?}{\Longrightarrow}$ Es projectivamente equiv. a cuádrica de

$$Q = \{x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0\}$$