Geometría algebraica I

18 de mayo

Ayer: Cónicas

Hoy: Recapitular definiciones del caso afín al proyectivo.

— // —

Eg: Superficies con coordenadas globales $\mathbb{P}^2 = [x : y : z]$

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = [x : y], [a : b]$.

$\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ encaje

$(x, y) \mapsto [x : y : 1]$ carta afín

$\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ " "

$(x, y) \mapsto [x : 1], [y : 1]$

Consecuencia: $V(f) = C \subseteq \mathbb{A}^2 \subseteq \mathbb{P}^2$

$\subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ encaje de Segre.

Una curva afín tiene varias proyectivizaciones

Por ejemplo: $C = \{ y^2 + x^3 + x(x+1) = 0 \} \subseteq \mathbb{A}^2_{(x,y)}$

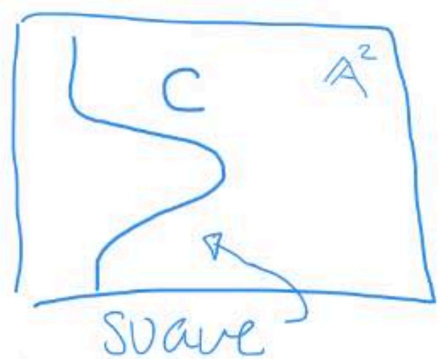
en $\mathbb{P}^2$

$$\tilde{C} = \{ y^2 z + x^3 + x^2 z + x z^2 = 0 \} \subseteq \mathbb{P}^2$$

$\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup L_\infty$, $L_\infty = [x:y:0]$

$$\tilde{C} \cap L_\infty = \{ x^{3} = 0 \} = [0:y:0] = [0:1:0]$$

mult 3.



$$\Rightarrow \tilde{C} = C \cup [0:1:0]$$

¿suave?

en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = [x:y], [a:b]$ $\quad (x,y) \mapsto [x:1], [y:1]$ $\quad (x,y) \mapsto [x:y:1]$

$$y^2 + \underline{x^3} + x(x+1)$$

$$\mathbb{P}^1 \times \underset{\underset{[y:y_0]}{\shortparallel}}{\mathbb{P}^1} \supseteq \left\{ y_0^2 x^3 + y_0^2 x^2 x_0 + y_0^2 x x_0^2 + \underline{y^2} x_0^3 \right\} = \tilde{\tilde{C}}$$

polinomio de bi grado $(3,2)$ en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Pregunta: ¿ $\tilde{C} = \tilde{\tilde{C}}$?

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^2 \cup \begin{matrix} L_\infty \\ \cup \\ L'_\infty \end{matrix}$$

$(x,y) \mapsto [x:1] \times [y:1]$

$$\tilde{\tilde{C}} = C \cup \begin{matrix} \tilde{\tilde{C}} \cap L_\infty \\ \oplus \\ \tilde{\tilde{C}} \cap L'_\infty \end{matrix}$$

$[1:0] \times [y:y_0] = L_\infty$

$[x:x_0], [1:0] = L'_\infty$

Moraleja: ¿Cuales son las superficies S que
(1) admiten un encaje de $\mathbb{A}^2$
$$\mathbb{A} \hookrightarrow S \; ?$$

"Def."- Una superficie se dice racional si admite un encaje de $\mathbb{A}^2$

(2) No tenemos una manera abstracta de estudiar a las variedades.

Recapitulación del curso:

Def $X \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad projectiva irreducible

$$X = V(I) \quad \leftarrow \text{primo}$$

1) $X_0 = X \setminus H_0$ es una parte afín de X

2) $\mathbb{F}(X) := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \mathbb{F}[x_0, \dots, x_n] \text{ homogéneos de grado } d \right\} \big/ \sim$

$$\frac{f}{f'} \sim \frac{g}{g'} \iff g'f - f'g \in I(X).$$

Campo de funciones racionales de X.

Observación: $\mathbb{F}(X) \cong \mathbb{F}(X_0)$

argumento:

$$\frac{f(x_0, \dots x_n)}{f'(x_0, \dots x_n)} \longmapsto \frac{f(1, x_1, \dots x_n)}{f'(1, x_1, \dots x_n)}$$

$$\frac{f\left(\frac{x_0}{x_0}, \dots \frac{x_n}{x_0}\right)}{f'\left(\frac{x_0}{x_0}, \dots \frac{x_n}{x_0}\right)} \longleftarrow\!\!\mid \frac{f(x_1, \dots x_n)}{f'(x_1, \dots, x_n)}$$

4) $\dim X = \operatorname{gr} \operatorname{tr}_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(X) = \operatorname{gr} \operatorname{tr}_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(X_0)$

$$= \min_{p \in X} \dim T_p X$$

<u>Nota</u>: $\text{grado tr}_{\mathbb{F}}\left(\mathbb{F}[x_0,\dots,x_n] \big/ I(X) \right)$ tiene una variable más que $\mathbb{F}(X_0)$

$$\Rightarrow \quad \text{grado tr}_{\mathbb{F}}\left(\mathbb{F}[x_0,\dots,x_n] \big/ I(X) \right) = \underbrace{\text{grado tr}_{\mathbb{F}}\left(\mathbb{F}(X_0)\right)} + 1$$

5) T_pX el espacio tangente a X en p se define T_pX_0 si $p \notin H_0$

$$T_pX_0 = \left(\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \right)^*$$

6) $p \in X$ se dice no singular si $\dim T_pX = \dim X$

se dice singular si $\dim T_pX > \dim X$.