Geometría algebraica I

25 mayo

Ayer: Recapitular

Hoy: Morfismos

— // —

Distinción entre funciones de $\mathbb{A}^n$ & $\mathbb{P}^n$

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{p(x_0, \dots, x_n)}{q(x_0, \dots, x_n)}$$

no es una función en $\underline{\underline{x}} \in \mathbb{P}^n$.
incluso si $q \neq 0$

Probema:
$x = [1:0:2]$
$= [-1:0:-2]$

Sin embargo ~~si~~ f tiene grado cero:

$$gr(f) := gr(p) - gr(q)$$

$\Rightarrow$ f se puede pensar como una función de X.

—//—

$X \subseteq \mathbb{P}^n_{[x_0 : \dots : x_n]}$ Variedad Proyectiva, $x \in X$

& $f = \dfrac{P}{Q}$ } homogéneo de grado cero; $Q(x) \neq 0$.

$\Rightarrow$ f define una función en una vecindad de $x \in X$ con valores en $\mathbb{F}$

En este caso f se dice Regular en x.

Def- $f : X \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{P}^n$ Una aplicación entre variedades proyectivas

f es regular $\forall\ x \in X$ si para alguna parte afín que contenga a $f(x)$ $\exists\ \mathcal{U} \ni x$ vecindad

$\mathbb{A}^n$ tal que: $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{A}^n$ y

$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{A}^n$ es un morfismo regular.

Def- $X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ Es un morfismo regular en (*)

$x \longmapsto [F_0(x) : \cdots : F_n(x)]$

con F_i polinomios homogéneos de $n+1$ variables del mismo grado.

(*) = complemento de los ceros comunes de los F_i's.

Def: $S(X) := \mathbb{F}[X^{afín}] = \dfrac{\mathbb{F}[x_0, \ldots, x_n]}{I(X)}$

$X \subseteq \mathbb{P}^n \quad ; \quad X^{afín} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$

Eg. $\{x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2 \quad ; \quad \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \subseteq \mathbb{A}^3_{(x,y,z)}$

$S(X)$ es un anillo graduado:

$$S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d(X)$$

anillo coordenado homogéneo

donde $S_d(X) = \{ f \in S(X) \mid f$ es homogéneo de grado $d \}$

y $\quad S_d \cap S_{d'} = \{\emptyset\}$ si $d \neq d'$

localización de anillos graduados: $S = \bigoplus S_d$

$T \subseteq S$ conjunto multiplicativo de elementos homogéneos.

si $f \in T$ y $g \in S$

$gr\left(\frac{g}{f}\right) = \underline{grado}\left(\frac{g}{f}\right) := grado(g) - grado(f)$.

<u>Hecho</u>: gr está bien definida en $T^{-1}S$.

<u>Def</u> - $S_{(T)} := \left\{ \frac{g}{f} \in S_T \;\middle|\; \frac{g}{f} \begin{array}{l} (1)\ \text{homogéneo} \\ (2)\ \text{mismo grado} \end{array} \right\}$

Eg: $T := \{ f^n \mid n \geq 0 \}$ $\quad S_{(T)} = \left\{ \frac{h}{f^m} \;\middle|\; gr\left(\frac{h}{f^m}\right) = 0 \right\}$

h y f homogéneos

si $V(f) \subseteq X$

$\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) = S_{(T)}$ donde

$\mathcal{U}_f = V(f)^c$.