Geometría algebraica I

1 Junio

Ayer: Morfismos II $\quad V \longrightarrow \mathbb{P}^n \quad x \mapsto [f_0(x) : \cdots : f_n(x)]$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \overset{\cup}{x}$

1) homogéneos de grado d

2) $\exists i$ tq. $f_i(x) \neq 0$

Hoy: EJEMPLOS

Lema: $L \subseteq \mathbb{P}^n$ línea y considerar $G \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie de grado d.

$\Rightarrow \quad |L \cap G| = d$ hasta multiplicidad.

Argumento: $L \subseteq \mathbb{P}^n$ línea, es la imagen

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{L} \mathbb{P}^n$$

$$[s:t] \longmapsto [a_0 s + b_0 t : a_1 s + b_1 t : \cdots : a_n s + b_n t]$$

con a_i's b_i's constantes.

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & & b_n \end{pmatrix}$$

$n=3$ clase pasada

$G = \{ g(x_0, \dots, x_n) = 0 \mid g$ homogéneo de grado $d \}$

$$|G \cap L| = \{ \underbrace{g(a_0 s + b_0 t, \dots, a_n s + b_n t)}_{\substack{\text{polinomio homogéneo } (s,t) \\ \text{de grado } d}} = 0 \}$$

$= L^{*}G$

$= \{ \text{ceros en } \underset{[s:t]}{\mathbb{P}^1} \text{ de } L^{*}G \} = \underline{\underline{d}}$

Teorema fundamental del álgebra.

$\blacksquare$

Teorema: $L_1\ L_2\ L_3\ L_4 \subseteq \mathbb{P}^3$ lineal genéricas

$\Rightarrow \exists\ l_1\ l_2$ lineal incidentes a $L_1\ L_2\ L_3\ L_4$ simultáneamente

Argumento:

$$L_1 = \left\{ \begin{array}{r} 2x+y=0 \\ z=0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{P}^3_{[x:y:z:w]}$$

$$l : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3 \qquad \begin{pmatrix} a_0 & & a_3 \\ b_0 & & b_3 \end{pmatrix}$$

$$[a_0s+b_0t : a_1s+b_1t : \cdots : a_3s+b_3t]$$

Paso 1: $H_1 = \{ l \in G(1,3) \mid l \cap L_1 \overset{?}{=} \} \subseteq G(1,3)$

Paso 2: $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 = ¿?$ ← Respuesta

$$— \, '' \, —$$

Paso 1: si $L_1 = \left\{ \begin{matrix} 2x+y=0 \\ z=0 \end{matrix} \right\} \subseteq \mathbb{P}^3$

$\ell : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3 \qquad \ell \cap \{2x+y=0\} = \{2(a_0 s + b_0 t) + a_1 s + b_1 t = 0\}$

$\ell \cap \{z=0\} = \{a_2 s + b_2 t = 0\}$

$$\underbrace{\ell \cap L_1}_{\neq 0}^{=P} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 2(\underline{\underline{a_0 s}} + b_0 t) + \underline{a_1 s} + b_1 t = 0 \\ a_2 s + b_2 t = 0 \end{matrix} \right\} \leftarrow \exists \text{ solución común}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2a_0 + a_1 & 2b_0 + b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ tiene rango } 1 \quad \leftarrow [\ker] = P$$

$$\Longleftrightarrow b_2(2a_0 + a_1) - a_2(2b_0 + b_1) = 0 \quad \leftarrow \text{"ecuación" de } H_1$$

$$\Longleftrightarrow \quad b_2(2a_0+a_1)-a_2(2b_0+b_1)=0$$ ← "ecuación" de H_1

Recordar

$$\mathbb{G}(1,3)=\{P_0P_5-P_1P_4+P_2P_3=0\}\subseteq \mathbb{P}^5 = [P_0 \cdots P_5]$$

cuádrica suave

¿Cómo se ve esta ecuación en coordenadas de Plücker?

Recordar: P_i = menores 2×2 $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$

$$P_0 = a_0b_1 - a_1b_0 \quad , \quad \ldots$$

$$\Sigma_1(L_1)=\{\ell\in\mathbb{G}(1,3) \mid \ell\cap L_1 \neq 0\}$$

¡Línea! $$=\{2P_1+P_2=0\}\cap\mathbb{G}\subseteq\mathbb{P}^5$$

$$\mathbb{L}=\Sigma_1(L_1)\cap\Sigma_1(L_2)\cap\Sigma_1(L_3)\cap\Sigma_1(L_4)\subseteq\mathbb{P}^5$$

Lema $\Rightarrow$ $|\mathbb{L}\cap\mathbb{G}|=2$ $\boxed{\text{}}$